

GÉOMÉTRIE

François Labourie ¹

October 14, 2024

¹Une partie de ce cours est inspirée de notes de Pierre Pansu et Laurent Clozel

Contents

I	Géométrie affine projective	11
1	Géométrie affine	12
1.1	Points et vecteurs	12
1.1.1	Espace affine	12
1.1.2	Repère d'un espace affine	13
1.1.3	Barycentre	13
1.1.4	Coordonnées barycentriques	14
1.2	Sous-espaces affines	15
1.3	Applications affines	15
1.3.1	Homothéties et théorème de Thalès	16
1.4	Complément : le complété vectoriel d'un espace affine	17
2	Perspective	18
2.0.1	Vues	18
2.0.2	Calcul de la vue en perspective	19
2.0.3	Applications projectives	20
2.0.4	Vues en perspective d'objets	21
3	La droite projective	22
3.1	La droite projective et le birapport	22
3.1.1	Homographies	22
3.1.2	Configurations de trois droites	23
3.1.3	Quadruplets de droites et birapport	23
3.1.4	Classification des homographies réelles	24
4	Géométrie projective	26
4.1	Espace projectif	26
4.2	Lien entre géométrie affine et projective	26
4.2.1	Carte affine	26
4.2.2	Complétion projective d'un espace affine	27
4.3	Sous-espaces projectifs	27
4.3.1	Intersection de sous espaces projectifs	28
4.3.2	Sous-espaces projectifs et cartes affines	28
4.4	Coordonnées homogènes	29
4.5	Repères projectifs	29
4.6	Applications projectives	31
4.6.1	Le groupe des homographies	32

4.6.2	Sous-groupes du groupe projectif : les transformations affines	33
4.7	Dualité	33
4.7.1	Dualité dans le plan projectif	33
5	Les grands théorèmes	36
5.1	Le théorème de Desargues	36
5.2	Le théorème de Pappus	37
5.3	Le théorème fondamental de la géométrie projective	38
5.3.1	Géométrie d'incidence	38
6	Coniques et quadriques	40
6.1	Coniques et quadriques	40
6.2	Plan tangent	41
6.3	Polarité	42
6.4	Groupes et coniques	43
6.5	Paramétrisation unicursale des coniques	43
6.6	L'hexagramme mystique de Pascal	45
6.7	Le groupe projectif orthogonal	47
6.8	Division harmonique	49
7	Topologie de l'espace projectif	51
7.1	Rappels de topologie	51
7.2	Un premier point de vue sur la topologie de l'espace projectif	52
7.3	Projecteurs	52
7.4	Droites projectives, applications	53
7.5	Deux lemmes utiles de topologie générale	53
II	Géométrie hyperbolique	54
8	Droites projectives réelle et complexe	55
8.1	La droite projective réelle	55
8.1.1	Classification des homographies réelles	55
8.2	Droite projective complexe et cercles projectifs	56
8.2.1	Cercles orthogonaux	57
8.2.2	Angle	58
9	Le plan hyperbolique	60
9.1	Présentation axiomatique	60
9.1.1	Involutions préservant le birapport	61
9.1.2	Isométries	62
9.1.3	Géodésiques orthogonales	63
9.1.4	Symétries axiales	64
9.1.5	Distance hyperbolique et paramétrisation	64
9.1.6	Angle entre deux géodésiques	66
9.2	Construction du plan hyperbolique : différent modèles	66
9.2.1	Le modèle des involutions	66
9.2.2	Le modèle projectif complexe du plan hyperbolique	67
9.2.3	Le modèle du demi-plan de Poincaré	69

9.2.4	Le modèle du disque de Poincaré	72
9.2.5	Le modèle projectif de Klein	73
10	Le plan hyperbolique comme espace métrique	74
10.1	Reconstruction de la géométrie à partir de la métrique	74
10.1.1	Géodésiques	74
10.1.2	Le bord à l'infini	74
10.1.3	Birapport	75
10.1.4	Triangles	76
10.2	Extension des isométries	76
10.3	Au voisinage d'un point	77
10.3.1	Les boules ouvertes	77
10.3.2	Angle	78
10.4	Comment caractériser l'espace hyperbolique	79
11	Les figures du plan hyperbolique	80
11.1	Demi-plan, quadrant, polygone convexes, triangles	80
11.1.1	Ensembles convexes	80
11.1.2	Polygones convexes	80
11.1.3	Triangles	82
11.2	Hexagones droits	82
11.3	Aire	84
11.4	La formule de Gauß-Bonnet	84
11.4.1	La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles idéaux	85
11.4.2	La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles avec deux points à l'infini	86
11.4.3	La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles	86
12	Surfaces hyperboliques	88
12.1	Premières définitions	88
12.1.1	Cartes et coordonnées	89
12.1.2	Bord et coins	89
12.2	Longueur des courbes et distance riemannienne	89
12.2.1	Courbes et longueurs	90
12.2.2	La distance riemannienne	91
12.3	Géodésiques	93
12.3.1	Extension des géodésiques	94
12.3.2	Géodésiques globalement minimisantes	95
13	Construction par recollement	97
13.1	Recollement et espace quotient	98
13.2	Une distance sur le quotient	99
13.2.1	Courbes et longueurs	99
13.2.2	Distance riemannienne	100
13.2.3	Recollement de surface	101
13.3	Hexagones droits et pantalons	102

14	Constructions par quotient	103
14.1	Groupes agissant proprement discontinuement sans point fixe	103
14.1.1	La surface hyperbolique quotient	103
14.2	Sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$	105
14.2.1	Sous-groupe discrets et sans torsion	105
14.3	Quotient et pavages	109
14.3.1	Domaine fondamental	109
14.4	Des exemples de groupes discrets	110
14.4.1	Groupes élémentaires	110
14.4.2	Groupes engendrés par des réflexions	110
14.4.3	Groupes de triangles	111
15	Les applications à valeurs dans dans le cercle	112
15.1	Motivation	112
15.2	Le théorème de relèvement	113
15.3	Degré	113
16	Groupe fondamental	115
16.1	Chemins et lacets	115
16.1.1	Définitions	115
16.1.2	Composition et inverse	115
16.2	Homotopie	116
16.2.1	Exemples d'homotopie	116
16.3	Simple connexité	116
16.3.1	Premiers exemples	117
16.4	Propriétés de l'homotopie et groupe fondamental	117
16.4.1	Propriétés fondamentales	117
16.4.2	Le groupe fondamental	117
16.4.3	Exemples	118
16.5	Changement de points base et applications	118
16.5.1	Chemins et changements de points base	118
16.5.2	Applications entre espaces	119
16.6	Surfaces hyperboliques simplement connexes	119
16.6.1	Isométries et chemins de boules	119
16.6.2	Chemin de boules homotopes	120
16.6.3	Surfaces hyperboliques simplement connexes	122
17	Revêtements	123
17.1	Introduction	123
17.1.1	Définition	123
17.1.2	Exemples	124
17.2	Relèvement des homotopies	125
17.2.1	Relèvements	125
17.2.2	Sections	125
17.2.3	Relèvement des chemins	126
17.2.4	Relèvement des homotopies	126
17.3	Critère de relevabilité	127
17.3.1	Automorphismes d'un revêtement	129

17.4 Construction d'un revêtement simplement connexe	130
17.4.1 Construction d'un revêtement simplement connexe	130
17.4.2 Propriété universelle	133
17.4.3 Unicité du revêtement simplement connexe	134
18 Revêtement des surfaces hyperboliques	135
18.1 Le théorème d'uniformisation	135
18.2 Revêtements	135
18.2.1 Complétude	136
18.3 Toute isométrie locale est un revêtement	137
18.3.1 Préliminaires : isométries locales et revêtement	137
18.3.2 Preuve du théorème	138
18.4 Uniformisation des surfaces hyperboliques	138
19 Décomposition en pantalons	139
19.1 Géodésique fermées	139
19.2 Courbes plongées	139
19.3 Une caractérisation des surfaces hyperboliques simplement connexes	140
19.3.1 Surfaces à coins carrés	140
19.4 Une caractérisation géométrique des pantalons	140
19.5 Classification des surfaces	140
20 Géométrie différentielle des surfaces	141
20.1 Cartes et atlas	141
20.1.1 Exemples	142
20.2 Fonctions et applications différentiables	142
20.2.1 Fonctions	142
20.2.2 La différentielle d'une fonction	142
20.2.3 Applications différentiables	143
20.3 Formes différentielles	144
20.3.1 Formes différentielles sur les variétés	144
20.3.2 Intégration des formes différentielles sur les courbes	145
20.3.3 Premier groupe d'homologie	147
20.3.4 Lemme d'homotopie	147
20.3.5 Formes fermées et groupe fondamental	147
20.3.6 Le théorème d'Hurewicz	147
III Groupe fondamental et revêtements	148
21 Les applications à valeurs dans le cercle	149
21.1 Motivation	149
21.2 Le théorème de relèvement	150
21.3 Degré	150
21.3.1 Degré des applications différentiables	151
21.3.2 Indice	152

22 Groupe fondamental	153
22.1 Chemins et lacets	153
22.1.1 Définitions	153
22.1.2 Composition et inverse	153
22.2 Homotopie	154
22.2.1 Exemples d'homotopie	154
22.3 Simple connexité	155
22.3.1 Premiers exemples	155
22.4 Propriétés de l'homotopie et groupe fondamental	155
22.4.1 Propriétés fondamentales	155
22.4.2 Le groupe fondamental	155
22.4.3 Exemples	156
23 Type d'homotopie	157
23.1 Homotopie entre applications	157
23.1.1 Le cas du cercle	157
23.1.2 Applications	158
23.1.3 Equivalences d'homotopie	159
23.1.4 Homotopie et groupes fondamentaux	160
23.1.5 Rétraction par déformation	162
24 Le théorème de Van Kampen	163
24.1 Motivation	163
24.1.1 Un résultat partiel	163
24.2 Constructions de théorie des groupes	164
24.2.1 Produit libre de deux groupes	164
24.2.2 Groupes définis par générateurs et relation	165
24.2.3 Somme amalgamée de groupes	166
24.3 Théorème de Van Kampen	167
24.3.1 Exemples	170
25 Revêtements	172
25.1 Introduction	172
25.1.1 Définition	172
25.1.2 Exemples	173
25.1.3 Sections	174
25.1.4 Morphismes	174
25.2 Relèvement des homotopies	176
25.2.1 Relèvements	176
25.2.2 Relèvement des chemins	176
25.2.3 Relèvement des homotopies	176
25.3 Critère de relevabilité	178
26 Revêtement universel	180
26.1 Construction d'un revêtement simplement connexe	180
26.2 Propriété universelle	182
26.2.1 Unicité du revêtement simplement connexe	182
26.2.2 Automorphismes du revêtement universel	182

27 Revêtements et groupe fondamental	184
27.1 Revêtements non connexes	184
27.2 Action sur la fibre	185
27.3 Construction de revêtements intermédiaires	186
27.4 Classification des revêtements connexes	188
27.4.1 Revêtements galoisiens	188
27.4.2 Revêtements du tore	191
27.5 A retenir	191
 IV Géométrie différentielle	 192
28 Sous-variétés	193
28.1 Difféomorphismes, immersions et submersions	193
28.1.1 Définitions	193
28.1.2 Les théorèmes	193
28.2 Sous-variétés	194
28.2.1 Espace tangent	196
28.2.2 Courbes complexes affines et des quadriques	197
 29 Variétés	 198
29.1 Cartes et atlas	198
29.1.1 Premiers exemples	199
29.1.2 Structure différentielle sur la droite projective	199
29.1.3 Structure différentielle sur l'espace projectif	199
29.2 Objets différentiables	200
29.2.1 Fonctions différentiables	200
29.2.2 Applications différentiables	200
29.2.3 Difféomorphismes, immersions et submersions	201
29.2.4 Sous-variétés	202
29.2.5 Revêtements et structures différentielles	203
 30 Partitions de l'unité	 204
30.0.1 Motivation	204
30.0.2 Construction	204
30.0.3 Plongement	206
30.0.4 Cas de l'espace projectif	206
 31 Les espaces cotangent et tangent	 208
31.1 L'espace cotangent et la différentielle d'une fonction	208
31.2 L'espace tangent et les courbes	209
31.2.1 Exemples de vecteurs tangents	210
31.2.2 Espace tangent à une sous-variété	210
31.3 Application tangente et cotangente	210

32 Formes différentielles	212
32.1 Formes différentielles de degré 1	212
32.2 Définitions et premières propriétés	212
32.2.1 Intégration des formes différentielles	213
32.2.2 Formes exactes et différentielle des formes	214
33 Formes différentielles et différentielle extérieure	216
33.1 Rappels d'algèbre linéaire	216
33.1.1 Formes multilinéaires alternées	216
33.1.2 Produit intérieur	216
33.1.3 Produit extérieur	217
33.1.4 Induction	217
33.2 Formes différentielles	217
33.2.1 Un exemple de forme de degré 2	218
33.3 Différentielle extérieure	219
33.3.1 Unicité de la différentielle extérieure	219
33.3.2 Existence de la différentielle extérieure	220
33.4 Formes différentielles induites	221
33.5 Un premier formulaire	222
33.6 Champ de vecteur et produit intérieur	223
33.6.1 Champ de vecteurs	223
33.6.2 Produit intérieur	223
33.6.3 Dérivation en un point	223
34 Lemme de Poincaré et cohomologie	225
34.1 Présentation	225
34.1.1 Espace contractile et homotopie	225
34.1.2 Lemme de Poincaré et formule d'homotopie	226
34.2 Démonstration de la formule d'homotopie	226
34.2.1 Formes différentielles sur $M \times [0, 1]$	226
34.2.2 Un cas particulier de la formule d'homotopie	228
34.2.3 Preuve de la formule d'homotopie	228
34.3 Cohomologie de Rham	229
34.4 Calculs de cohomologie	230
34.4.1 La cohomologie du cercle	230
34.4.2 La cohomologie des sphères	231
34.4.3 Cohomologie de $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points	232
35 Orientation et variétés à bord	233
35.1 Formes volumes et orientation	233
35.2 Variétés à bord	234
35.2.1 Le demi-espace	234
35.2.2 Variétés à bord	235
35.2.3 Orientation du bord d'une variété à bord	235

36	Intégration des formes différentielles	236
36.1	Intégration sur $\mathbb{R}^n$	236
36.2	Intégration sur une variété	236
36.3	La formule de Stokes	238
36.4	Applications de la formule de Stokes	239
36.4.1	Divergence et formule de Green-Ostrogradski	239
36.4.2	Le théorème du point fixe de Brouwer	240
36.4.3	Cohomologie en degré maximal	241
37	Champ de vecteurs	244
37.1	Flot d'un champ de vecteurs	244
37.1.1	Flot d'un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$	244
37.1.2	Flot d'un champ de vecteurs sur une variété	245
37.1.3	Flot d'un champ de vecteur dépendant du temps	245
37.2	Crochet de Lie de deux champs de vecteurs	246
37.2.1	Dérivations	246
37.2.2	Crochet de Lie	247
37.2.3	Champ de vecteur et difféomorphismes	247
37.3	Calcul de Lie-Cartan	249
37.3.1	La formule de Lie-Cartan	249
37.3.2	Un formulaire	250
37.4	Applications : construction de difféomorphismes	250
37.4.1	Transitivité du groupe des difféomorphismes	250
37.4.2	Le lemme de Moser	251
V	Courbes complexes	252
38	Courbes complexes	253
38.1	Courbes complexes	253
38.1.1	Courbes complexes	253
38.2	Courbes complexes simplement connexes	254
38.2.1	La droite projective complexe	254
38.2.2	Le disque, le demi plan supérieur et ses quotients	254
38.2.3	Le théorème d'uniformisation	255
38.3	Premières applications	255
38.3.1	Le théorème fondamental de l'algèbre	255
38.3.2	Le petit théorème de Picard	256
38.4	Courbes complexes planes	256
38.5	Courbes planes cubiques	256
38.5.1	Connexité	257
39	Formes abéliennes	259
39.1	Définition	259
39.1.1	Périodes	259
39.2	Homologie	259
39.2.1	Le théorème de Hurewicz	259
39.2.2	Le genre d'une courbe	259

39.2.3	La formule de Riemann-Hurwitz	259
39.2.4	Le genre d'une courbe plane	259
39.3	Le groupe fondamental d'une courbe plane	259
39.4	Retour sur les cubiques	259
39.5	1-formes différentielles	259
39.5.1	Rappels	259
39.5.2	Motivation	261
39.5.3	Courbes algébriques planes projectives	262
39.5.4	Revêtement ramifié	262
39.5.5	Calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré	263
39.5.6	Différentiabilité de dx/y	264
39.5.7	1-formes fermées et primitives	264
39.5.8	Application d'Abel-Jacobi	265
39.5.9	Un théorème d'Abel	266
39.5.10	Structure de groupe sur la cubique	267
40	Espace tangent	269
40.0.1	Espace tangent	269
40.0.2	Champs de vecteurs	270
40.0.3	Flots	270
40.0.4	Intersection de sous-variétés	271
40.1	Orientation	273
40.1.1	Rappel : orientation d'un espace vectoriel	273
40.1.2	Orientation d'une variété	273
40.1.3	Orientabilité	273
40.2	Éléments de topologie différentielle	275
40.2.1	Régularité	275
40.2.2	Classification des variétés de dimension 1	276
40.3	Caractéristique d'Euler-Poincaré	277
40.3.1	Décompositions cellulaires convexes	277
40.3.2	Invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré	279
40.4	Variétés compactes de dimension 2	280
40.4.1	Somme connexe	280
40.4.2	Dépendance par rapport aux choix	281
40.4.3	Exemples de variétés de dimension 2	281
40.4.4	Décompositions cellulaires lisses	282
40.4.5	Exemples de décompositions cellulaires lisses	282
40.4.6	Décompositions, revêtements et sommes connexes	285
40.4.7	Classification des variétés compactes de dimension 2	285

Part I

Géométrie affine projective

Chapter 1

Géométrie affine

1.1 Points et vecteurs

1.1.1 Espace affine

Définition 1.1.1. [ESPACE AFFINE] Un espace affine modelé sur un espace vectoriel E défini sur un corps $\mathbb{K}$ – ou d’espace tangent E – est un ensemble $\mathcal{E}$ dont les éléments sont appelés points et de deux applications définies :

1. la somme d’un point et d’un vecteur qui est une application de $\mathcal{E} \times E$ dans $\mathcal{E}$, $(p, u) \rightarrow p + u$,
2. la différence de deux points qui est une application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans E $(p, q) \rightarrow q - p$

telles que pour tous points p et q de $\mathcal{E}$ et u et v de E , on ait les relations d’associativité suivantes

$$p + (q - p) = q, \quad (1.1)$$

$$(p + u) + v = p + (u + v), \quad (1.2)$$

$$(p - q) + u = (p + u) - q. \quad (1.3)$$

REMARQUES : On vérifie alors qu’on a les relations suivantes

$$p - p = 0 \quad (1.4)$$

$$p + 0 = p \quad (1.5)$$

$$q - p = m - p \text{ si et seulement si } p = m, \quad (1.6)$$

$$p + u = p + v \text{ si et seulement si } u = v. \quad (1.7)$$

En effet, $(p - p) + (q - p) = (p + (q - p)) - p = q - p$. Donc $p - p = 0$. Ainsi $p + 0 = p + (p - p) = p$. Si maintenant $p + u = p + v$, alors $(p + u) - p = (p + v) - p$ ainso $(p - p) + u = (p - p) + v$ et $u = v$. Enfin, si $(q - p) = (m - p)$ alors $q = p + (q - p) = p + (m - p) = m$.

On utilise aussi la notation $\vec{pq} = q - p$. Avec ces notations, on a alors la relation de Chasles :

Proposition 1.1.2. Pour tous points p, q et m d’un espace affine $\mathcal{E}$

$$\vec{pq} = \vec{pm} + \vec{mq}. \quad (1.8)$$

EXEMPLE :

1. Un espace vectoriel E est en particulier un espace affine modelé sur lui-même.
2. Ainsi, $\mathbb{R}^n$ admet une structure d'espace affine canonique. les somme et différence correspondent alors aux calculs en coordonnées.
3. Par définition la *dimension d'un espace affine* est celle de l'espace vectoriel sous-jacent.

EXERCICE : Soit $(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$ des points d'un espace affine modelé sur E tels que $\{p_i - p_1\}_{i \neq 1}$ forme une base de E . Montrez que pour tout i_0 , $\{p_i - p_{i_0}\}_{i \neq i_0}$ est une base de E .

1.1.2 Repère d'un espace affine

Définition 1.1.3. Un repère d'un espace affine de dimension n modelé sur E est la donnée d'un uplet $\mathcal{R} = (M, e_1, \dots, e_n)$ où M est un point de $\mathcal{E}$ – appelé origine – et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Dans ce cas, l'application $\theta_{\mathcal{R}}$ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathcal{E}$ définie par

$$(\lambda_1, \lambda_n) \rightarrow M + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i,$$

est une bijection. Si $\theta_{\mathcal{R}}(\lambda_1, \lambda_n) = p$ alors (λ_1, λ_n) sont les coordonnées de p dans le repère $\mathcal{R}$.

EXEMPLE : Dans $\mathbb{R}^n$ rapporté au repère $(o, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, un point p est représenté par la colonne de ses coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

qui sont les composantes du vecteur $\vec{op}$. Si p et q sont des points, $\vec{v}$ un vecteur de composantes E , a un réel, on note $q - p = \vec{pq}$, $r = p + \vec{v}$ le point tel que $\vec{pr} = \vec{v}$.

1.1.3 Barycentre

Proposition 1.1.4. Soit $p_1, \dots, p_n$ des points d'un espace affine $\mathcal{E}$ défini sur $\mathbb{K}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = 1$. Soit m_0 un point de $\mathcal{E}$ et q tel que

$$q = m_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i m_0 \vec{p}_i.$$

Alors, pour tout m de $\mathcal{E}$

$$q = m + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i m \vec{p}_i.$$

Définition 1.1.5. Des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i = 1$ s'appelle des poids.

Définition 1.1.6. Avec les notations de la proposition, l'unique point q de $\mathcal{E}$ tel que pour tout m de $\mathcal{E}$, on a

$$m\vec{q} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i m \vec{p}_i,$$

est appelé barycentre des points p_i affectés des poids λ_i . On le note

$$q = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i p_i.$$

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Les coordonnées du barycentre sont les moyennes des coordonnées pondérées des poids.
2. Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2, le milieu de p et q est le barycentre affecté des coefficients $\frac{1}{2}$. Il est aussi noté $\frac{p+q}{2}$.
3. Pour tous points p, q, m et n de $\mathcal{E}$, on a

$$p\vec{q} = m\vec{n}$$

si et seulement si

$$\frac{p+n}{2} = \frac{q+m}{2}.$$

Autrement dit : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

1.1.4 Coordonnées barycentriques

Proposition 1.1.7. Soit $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ des points d'un espace affine $\mathcal{E}$ tels que $\{p_i - p_1\}_{i \neq 1}$ forme une base de l'espace tangent. Alors pour tout x de $\mathcal{E}$, il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $\sum_i \lambda_i = 1$ et

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i p_i.$$

Définition 1.1.8. Soit $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ des points d'un espace affine $\mathcal{E}$ tels que $\{p_i - p_1\}_{i \neq 1}$ forme une base de l'espace tangent. L'application qui à un point de $\mathcal{E}$ associe les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $\sum_i \lambda_i = 1$ et

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i p_i,$$

s'appelle coordonnées barycentriques.

En conclusion, la différence de deux points est un vecteur, le barycentre de deux points est un point, on peut ajouter un vecteur et un point. Plus généralement une combinaison $\sum_i m_i p_i$ est un point (barycentre des points p_i affectés des masses m_i) si $\sum_i m_i = 1$. Ces notations "additives" sont compatibles avec les calculs en coordonnées.

1.2 Sous-espaces affines

Définition 1.2.1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace tangent E , un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble $\mathcal{F}$ tel que il existe un p tel que

$$F_p := \{q - p \mid p \in \mathcal{F}\},$$

est un sous-espace vectoriel de E . La dimension de $\mathcal{F}$ est celle de F .

REMARQUES :

- Le sous-espace affine $\mathcal{F}$ de la définition est alors un espace affine d'espace tangent F .
- Deux sous-espaces affines sont parallèles s'ils ont le même espace tangent.
- Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine alors pour tout point p de $\mathcal{F}$ l'ensemble

$$F_p := \{q - p \mid p \in \mathcal{F}\},$$

est l'espace tangent à $\mathcal{F}$.

- L'ensemble $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine si et seulement si tout barycentre de points de $\mathcal{F}$ est un point de $\mathcal{F}$.

1.3 Applications affines

Définition 1.3.1. Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ des espaces affines modélisés sur E et F . Une application $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est affine s'il existe une application linéaire $L : E \rightarrow F$ telle que pour tous points p, q de $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{L}(q) = \mathcal{L}(p) + L(\vec{pq}).$$

L'endomorphisme L s'appelle la partie linéaire de $\mathcal{L}$, ou l'application linéaire tangente à $\mathcal{L}$.

Proposition 1.3.2. La composée d'applications affines est affine.

Proposition 1.3.3. Si $\mathcal{L}$ est affine, alors pour tous poids $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a

$$\mathcal{L}\left(\sum_i \lambda_i p_i\right) = \sum_i \lambda_i \mathcal{L}(p_i).$$

Réciproquement si pour tout λ de $\mathbb{K}$, l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ vérifient

$$\mathcal{L}(\lambda p + (1 - \lambda)q) = \lambda \mathcal{L}(p) + (1 - \lambda)\mathcal{L}(q),$$

alors f est affine.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Applications linéaires.
2. Translations (ce sont les applications affines dont la partie linéaire est l'identité).
3. Homothéties (on remarquera que la construction des homothéties utilise la commutativité du corps $\mathbb{K}$).
4. Symétries orthogonales par rapport à des droites affines du plan (exercice).
5. Rotations autour de points du plan (exercice).

1.3.1 Homothéties et théorème de Thalès

Soit D une droite affine et trois points O, A et B de D , le rapport $\frac{OA}{OB}$ est le scalaire λ tel que

$$O - A = \lambda(O - B).$$

Théorème 1. [THALÈS (SIXIÈME SIÈCLE AVANT NOTRE ÈRE)] Soit D et D' deux droites distinctes d'un espace affine concourantes en O . Soit A et B , respectivement A' et B' , deux points de D , respectivement de D' . Alors $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$ si et seulement si les droites AA' et BB' sont parallèles.

DÉMONSTRATION : Il suffit d'utiliser l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{OA}{OB}$. $\square$

EXERCICE : Montrez la version dégénérée de Thalès suivante. Soit D et D' deux droites distinctes parallèles. Soit A, B, C , respectivement A', B', C' , trois points de D , respectivement de D' . On suppose que AB' est parallèle à $A'B$ et que $B'C$ est parallèle à BC' . Montrez que AC' est parallèle à $A'C$.

Après choix de repères, toute application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ possède une unique écriture matricielle, compatible avec la composition :

Proposition 1.3.4. Soit $(o, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère de $\mathcal{E}$ et $(p, f_1, \dots, f_n)$ un repère de $\mathcal{F}$. La matrice de $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ dans ces repères est

$$M_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} M_L & p\vec{f}(o) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où M_L désigne la matrice de L dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

REMARQUES :

1. Une application affine est bijective si et seulement si sa partie linéaire l'est, son inverse est alors affine
2. Le groupe affine est un produit semi-direct.
3. Le lieu des points fixes d'une application affine est un sous-espace affine, cas où il est non vide, dimension, lien avec la multiplicité de 1 comme valeur propre de la partie linéaire.

Proposition 1.3.5. Soit $(e, e_1, \dots, e_n)$ et $(o', e'_1, \dots, e'_n)$ deux repères affines de $\mathbb{R}^n$. Soit f une transformation affine de matrices M et M' dans ces repères. Notons E la colonne des coordonnées du point o' dans le repère $(o, e_1, \dots, e_n)$. Posons

$$P_a = \begin{pmatrix} P & E \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où P est la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ dans la base $(e'_1, \dots, e'_n)$, i.e. les colonnes de P sont les composantes des vecteurs e'_j dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors

$$M' = P_a^{-1} M P_a.$$

1.4 Complément : le complété vectoriel d'un espace affine

Tout espace affine est l'hyperplan affine d'un espace vectoriel unique.

Proposition 1.4.1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine modelé sur E , il existe un espace vectoriel $\hat{\mathcal{E}}$ et une injection i affine de $\mathcal{E}$ dans $\hat{\mathcal{E}}$ tels que pour toute application affine $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$ dans un espace vectoriel V , il existe une application linéaire unique $\hat{\mathcal{L}}$ de $\hat{\mathcal{E}}$ dans V , telle que*

$$\hat{\mathcal{L}} \circ i = \mathcal{L}.$$

DÉMONSTRATION : Soit p un point d'un espace affine $\mathcal{E}$ modelé sur E . On pose $\hat{\mathcal{E}} = E \oplus \mathbb{K}$. L'espace affine $\mathcal{E}$ se plonge de manière affine dans $\hat{\mathcal{E}}$ par $x \rightarrow (x - p, 1)$. On prend ensuite $\hat{\mathcal{L}}(u, \lambda) = L(u) + \lambda \cdot \mathcal{L}(p)$. $\square$

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. L'espace $\hat{\mathcal{E}}$ est dit solution d'un *problème universel*. On montre en utilisant la proposition que $(\hat{\mathcal{E}}, i)$ est unique à isomorphisme linéaire près.
2. L'espace vectoriel tangent E s'injecte dans $\hat{\mathcal{E}}$ en prenant l'application linéaire tangent à i .
3. $\dim(\hat{\mathcal{E}}) = \dim(\mathcal{E}) + 1$.

Définition 1.4.2. *L'espace vectoriel $\hat{\mathcal{E}}$ construit dans la proposition précédente est le complété vectoriel de $\mathcal{E}$.*

Corollaire 1.4.3. *Le complété vectoriel d'un espace affine est unique à isomorphisme près. De plus, toute application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ s'étend en une application linéaire de $\hat{\mathcal{E}}$ dans $\hat{\mathcal{F}}$ appelé extension linéaire de $\mathcal{L}$. La composée des extensions linéaires est l'extension linéaire de la composée.*

Proposition 1.4.4. *Tout repère $(p, e_1, \dots, e_n)$ de $\mathcal{E}$ donne une base de son complété vectoriel. De plus, la matrice de l'extension linéaire d'une application affine est la matrice de l'application affine.*

Chapter 2

Perspective

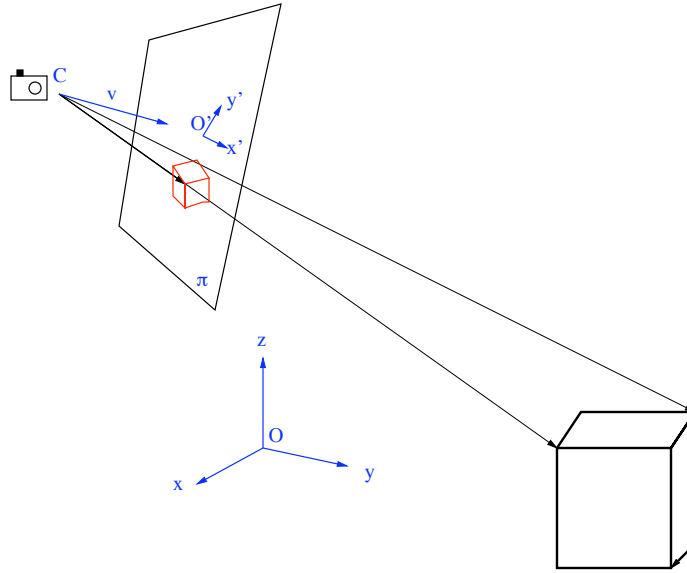
2.0.1 Vues

Une *vue* d'une scène 3D est déterminée par les données suivantes.

- La position de la caméra : un point c de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.
- Une direction de visée : un vecteur unitaire $\vec{v}$ de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
- Un *écran*, i.e. un plan Π perpendiculaire à la direction de visée : il est déterminé par sa distance à C , un réel positif d .
- Un repère orthonormé $(o', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ du plan Π .

Une *vue* de la scène est une application $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, qui aux coordonnées d'un point dans le *repère du monde* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ associe les coordonnées de sa projection sur l'écran Π , dans le *repère de l'image* $(o', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$.

Définition 2.0.1. La vue en perspective depuis c sur l'écran Π consiste à projeter un point p sur p' , point d'intersection de la droite cp avec Π .



REMARQUES : La projection n'est pas définie si p est dans le plan passant par C et parallèle à Π . C'est normal : on n'arrive pas à voir dans les directions situées à 90° de sa direction de vision.

Définition 2.0.2. Prise de vue à distance infinie. Soit D une droite, appelée axe de visée, et Π un plan orthogonal à D . La prise de vue à distance infinie dans la direction D consiste à projeter orthogonalement sur Π .

C'est ce qu'on obtient à la limite, lorsque, Π et o' étant fixés, C tend vers l'infini le long de la droite $D = (o', \vec{u})$.

2.0.2 Calcul de la vue en perspective

Voici un moyen systématique de construire le repère (o', e'_1, e'_2) . Il suffit de choisir une fois pour toute un vecteur unitaire $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{v}$. On prend pour o' la projection orthogonale de C sur Π , soit $o' = C + d\vec{v}$. On prend

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{v} \wedge \vec{v}}{|\vec{v} \wedge \vec{v}|} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = \vec{v} \wedge \vec{e}_1.$$

Proposition 2.0.3. On choisit $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de p' sont données, en fonction des

coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de p , par les formules

$$x' = \frac{-cd(x - x_0) + ad(z - z_0)}{\sqrt{a^2 + c^2}(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0))},$$

$$y' = \frac{abd(x - x_0) - d(a^2 + c^2)(y - y_0) + bcd(z - z_0)}{\sqrt{a^2 + c^2}(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0))}.$$

On constate que la vue en perspective s'exprime par des fractions rationnelles. Complétons le repère de l'image en un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$ en posant $\vec{e}_3 = \vec{v}$. La troisième coordonnée de p' est évidemment $z' = 0$.

On ramène ces expressions rationnelles à des expressions linéaires en adoptant la convention suivante : Un point p de $\mathbb{R}^3$ peut être représenté, non seulement par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, mais par n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui lui est proportionnel. En particulier, un point p' du plan Π peut être représenté par n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ proportionnel à $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec cette convention, on peut choisir pour représentant de la vue en perspective p' d'un point p le vecteur

$$\begin{pmatrix} -cd(x - x_0) + ad(z - z_0) \\ abd(x - x_0) - d(a^2 + c^2)(y - y_0) + bcd(z - z_0) \\ 0 \\ \sqrt{a^2 + c^2}(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)) \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice

$$\begin{pmatrix} -cd & 0 & ad & cdx_0 - adz_0 \\ abd & -d(a^2 + c^2) & bcd & -abdx_0 + d(a^2 + c^2)y_0 - bcdz_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a\sqrt{a^2 + c^2} & b\sqrt{a^2 + c^2} & c\sqrt{a^2 + c^2} & \sqrt{a^2 + c^2}(-ax_0 - by_0 - cz_0) \end{pmatrix}$$

C'est quand même plus sympathique (et commode à implémenter informatiquement) de passer par une matrice pour représenter la vue en perspective.

Définition 2.0.4. Soit $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de $\mathbb{R}^3$. On appelle coordonnées homogènes de p tout quadruplet (u, v, w, t) proportionnel à $(x, y, z, 1)$. On note $p = [x; y; z; t]$.

2.0.3 Applications projectives

Définition 2.0.5. Application projective $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ = donnée "en coordonnées homogènes" par une matrice $(m + 1) \times (n + 1)$ non nulle.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Applications affines.
2. Vue en perspective d'une droite.
3. Vue en perspective d'un plan.

2.0.4 Vues en perspective d'objets

EXEMPLE : La vue d'un plan est affine si et seulement si le plan est orthogonal à la droite de visée. Dans ce cas, la vue est homothétique.

EXERCICE : Vérifier que, vue en perspective, une droite reste en général une droite. Quelles sont les exceptions ? Montrer que, vues en perspectives, les droites parallèles à une droite D sont en général concourantes en un point appelé *point de fuite* de D . Quelles sont les exceptions ? Où se trouvent les points de fuites des droites contenues dans un même plan ?

REMARQUES : Dans une ville, les immeubles sont souvent des parallélépipèdes aux arêtes parallèles à trois directions fixées. Vues en perspective, ces trois familles d'arêtes sont portées par des droites concourantes en trois points. Si la direction de visée est horizontale, les arêtes verticales restent parallèles, et il ne reste plus que deux points de concours nettement visibles sur l'image : on parle de *perspective à deux points de fuite*.

EXERCICE : Soit D_+ une demi-droite, S un segment de droite. Qu'est ce qu'ils donnent, vus en perspective ? Attention, il y a de multiples cas de figure.

REMARQUES : On a décrit une vue comme la projection sur l'écran de tout l'espace. En réalité, une vue ne montre que ce qui se trouve devant l'écran. La vue en perspective réelle d'une droite est donc la projection d'une demi-droite ne coupant pas le plan parallèle à l'écran passant par la caméra : on voit un segment dont les extrémités sont le point de fuite et l'intersection de la droite avec l'écran.

EXERCICE : A quoi ressemble un cercle vu en perspective ? Tenir compte de la remarque précédente.

EXERCICE : A quoi ressemble une sphère vue en perspective ?

Chapter 3

La droite projective

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (le plus souvent, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, parfois $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Soit P un plan vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 3.0.1. La droite projective de P , notée $\mathbb{P}(P)$, est l'ensemble des droites vectorielles de P .

Définition 3.0.2. Si (e_1, e_2) est une base vectorielle de P , nous dirons que le point d de P – qui est une droite vectorielle – est de coordonnées homogènes $[x : y]$ avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ si la droite vectorielle d est engendrée par le vecteur $xe_1 + ye_2$.

3.1 La droite projective et le birapport

Soit P un plan vectoriel sur $\mathbb{K}$. Traitons d'abord le cas où P est muni d'une base de telle sorte qu'on l'identifie avec $\mathbb{K}^2$.

Nous identifions alors $\mathbb{P}(P)$ avec $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ en utilisant les coordonnées homogènes de la manière suivante

$$\begin{aligned} [x : y] &\mapsto \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0, \\ [x : 0] &\mapsto \infty \end{aligned} \tag{3.1}$$

Par abus de langage, on appelle également cette identification coordonnées homogènes.

3.1.1 Homographies

Soit A une transformation linéaire inversible de P donnée dans la base (e_1, e_2) par une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Comme A est inversible, l'image de toute droite est une droite et A définit ainsi une bijection de $\mathbb{P}(P)$ dans $\mathbb{P}(P)$ notée aussi A .

Définition 3.1.1. Si A est une application inversible, l'application A de $\mathbb{P}(P)$ dans $\mathbb{P}(P)$ qui a une droite associe l'image de cette droite est appelée homographie.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. deux applications inversibles A et B donnent naissance à la même homographie si et seulement si $A = k.B$ où k est une homothétie.

Proposition 3.1.2. *En identifiant $\mathbb{P}(P)$ avec $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$, on a $A(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.*

3.1.2 Configurations de trois droites

Proposition 3.1.3. *Soit (D_1, D_2, D_3) trois droites distinctes. Il existe alors une base (e_1, e_2) de E telle que e_1 engendre D_1 , e_2 engendre D_2 et $(e_1 + e_2)$ engendre D_3 . De plus (e_1, e_2) est unique à une homothétie près.*

Corollaire 3.1.4. *Soit (D_1, D_2, D_3) et (E_1, E_2, E_3) deux triplets formés de trois droites distinctes. Il existe alors une transformation linéaire A telle que $A(D_i) = E_i$. L'application A est unique à multiplication près par une homothétie.*

Nous pouvons interpréter ces résultats dans le monde projectif

Corollaire 3.1.5. *Soit (D_1, D_2, D_3) trois points distincts de $\mathbb{P}(P)$, il existe alors des unique coordonnées homogènes tels que $D_1 = \infty$, $D_2 = 0$, $D_3 = 1$.*

Corollaire 3.1.6. *Soit (D_1, D_2, D_3) et (E_1, E_2, E_3) deux triplets formés de trois points distincts de $\mathbb{P}(P)$, il existe alors une unique homographie qui envoie D_i sur E_i .*

3.1.3 Quadruplets de droites et birapport

Définition 3.1.7. *Soit (D_1, D_2, D_3, D_4) quatre droites distinctes. Choisissons les coordonnées homogènes telles que $D_1 = \infty$, $D_2 = 0$, $D_3 = 1$, le birapport de (D_1, D_2, D_3, D_4) , noté $[D_1, D_2, D_3, D_4]$ est la coordonnée homogène de D_4 .*

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. En coordonnées homogènes, on a donc $[\infty, 0, 1, x] = x$.
2. Par définition, il existe une base (e_1, e_2) de P telle que e_1 engendre D_1 , e_2 engendre D_2 , $(e_1 + e_2)$ engendre D_3 et $([D_1, D_2, D_3, D_4]e_1 + e_2)$ engendre D_4 . De plus ceci caractérise le birapport.
3. Si A est une bijection linéaire alors

$$[A(D_1), A(D_2), A(D_3), A(D_4)] = [D_1, D_2, D_3, D_4].$$

Proposition 3.1.8. *Si dans des coordonnées homogènes $D_i = x_i$ alors*

$$[D_1, D_2, D_3, D_4] = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_2 - x_3}.$$

DÉMONSTRATION : Notons

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} \cdot \frac{x_3 - x_4}{x_3 - x_2}.$$

On remarque tout d'abord que $Q(\infty, 0, 1, x) = x$. Pour conclure en utilisant les propositions 3.1.3 et 3.1.2, il suffit de montrer que

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = Q\left(\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}, \frac{ax_3 + b}{cx_3 + d}, \frac{ax_4 + b}{cx_4 + d}\right),$$

ce qui se fait par un calcul direct. $\square$

EXERCICE : Soit P un plan vectoriel muni d'une métrique euclidienne g . On considère le plan complexifié $P_{\mathbb{C}}$. Les *points cycliques* sont les deux droites complexes sur laquelle g s'annule. Soit D, D' deux droites de P . Montrer que l'angle θ entre D et D' s'exprime au moyen du birapport des points f, f', c, c' où c et c' sont les points cycliques et f et f' sont les droites complexifiées.

Solution. $e^{-2i\theta} = [f, f', c, c']$.

3.1.4 Classification des homographies réelles

Une homographie différente de l'identité fixe au plus deux points et une homographie qui renverse l'orientation fixe exactement deux points.

Définition 3.1.9. Soit A une homographie de la droite projective réelle

1. Si A ne fixe aucun point, alors A est dite elliptique.
2. Si A fixe exactement un point de la droite projective réelle, alors A est dite parabolique.
3. Si A fixe exactement deux points et préserve l'orientation alors A est dite hyperbolique.

Nous pouvons affiner la description de ces diverses isométries. Cette classification s'exprime en fonction du déterminant et de la trace. Si une homographie A est représentée par une matrice B de déterminant positif, nous poserons $\text{tr}(A) = |\text{tr}(B/\sqrt{\det(B)})|$.

Théorème 2. [CLASSIFICATION DES HOMOGRAPHIES RÉELLES] Nous avons la classification suivante des homographies préservant l'orientation.

1. Si $\det(A) > 0$ et $\text{tr}(A) < 2$ alors A est elliptique.
2. Si $\det(A) > 0$ et $\text{tr}(A) = 2$, alors A est parabolique.
3. Si $\det(A) > 0$ et $\text{tr}(A) > 2$, alors A est hyperbolique.

Remarquons que suivant les cas l'homographie A est conjuguée successivement à une homographie de représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Symétrie axiale

Proposition 3.1.10. *Soit A une homographie renverse l'orientation dont les points fixes sont x_0 et x_1 . Les assertions suivantes sont équivalentes*

- $A^2 = \text{Id}$,
- si et seulement si pour tout point y de la droite projective, on a $[x_0, x_1, y, A(y)] = -1$.
- A est représentée par une application linéaire de trace nulle.

Une telle homographie est appelée homo

Fin du cours n°2

Chapter 4

Géométrie projective

Nous allons en particulier généraliser la discussion du dernier paragraphe en dimension supérieure.

4.1 Espace projectif

Définition 4.1.1. L'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ est l'ensemble des droites de l'espace vectoriel V . Sa dimension est celle de V diminuée de 1 : $\dim(\mathbb{P}(V)) = \dim(V) - 1$.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Un espace projectif de dimension 1 est une *droite projective*, un espace projectif de dimension 2 est un *plan projectif*.
2. On note $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ et quelquefois $\mathbb{K}\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. On a
 - $\mathbb{P}(\mathbb{K}^0) = \emptyset$. Par convention, sa dimension vaut -1 .
 - $\mathbb{P}(\mathbb{K}^1) = \{pt\}$.
 - $\mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$ s'appelle la *droite projective* sur $\mathbb{K}$. Un point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, c'est une pente, éventuellement infinie.
 - $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ s'appelle le *plan projectif* sur $\mathbb{K}$.

Ainsi $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ est la droite projective réelle, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ est le plan projectif complexe etc.

3. Si W est un sous-espace vectoriel de V , alors $\mathbb{P}(W)$ est naturellement un sous-ensemble de $\mathbb{P}(V)$ appelé *sous-espace projectif*.

4.2 Lien entre géométrie affine et projective

4.2.1 Carte affine

Soit P un hyperplan vectoriel de V .

Définition 4.2.1. La carte affine O_P associée à P est l'ensemble de droites non contenues dans P . L'hyperplan P est alors le l'hyperplan à l'infini de la carte affine.

Nous avons alors

Proposition 4.2.2. Le complémentaire d'une carte affine est un hyperplan projectif : $\mathbb{P}(V) \setminus O_P = \mathbb{P}(P)$. De plus si B est un hyperplan affine d'espace tangent V et ne passant pas par 0 l'application $b : D \rightarrow D \cap B$ de O_P dans B est une bijection. Si B et B' sont deux tels hyperplans $b \circ b'^{-1}$ est une bijection affine.

Corollaire 4.2.3. Une carte affine a une structure d'espace affine O . L'espace vectoriel sous jacent est isomorphe (mais non canoniquement, en fait à une constante près) à V où $\mathbb{P}(V)$ est l'hyperplan à l'infini de O_P .

DÉMONSTRATION : Soit donc O_P une carte affine. Nous venons de voir que O_P est en bijection un hyperplan affine B , parallèle à V et ne passant pas par zéro. Nous en déduisons que O_P à une structure d'espace affine.

Dire que cette structure affine ne dépend pas de B revient à dire que si nous munissons d'une part O_P de la structure affine provenant de B (et le notons alors O_P^B) et d'autre part de la structure affine provenant de B' (et le notons alors $O_P^{B'}$) alors l'identité est une application affine de O_P^B dans $O_P^{B'}$. $\square$

Définition 4.2.4. On dit que $\mathbb{P}(P)$ est l'hyperplan à l'infini de la carte affine O_P .

EXERCICES :

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini, montrez que $\#(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})) = \#(\mathbb{K}) + 1$.
2. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini, calculez par récurrence $\#(\mathbb{P}^n(\mathbb{K}))$.
3. Montrez que l'espace projectif est une réunion de carte projectives.

4.2.2 Complétion projective d'un espace affine

Nous allons démontrer que la géométrie affine d'un espace affine s'étend en la géométrie projective d'un espace projectif.

Définition 4.2.5. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et soit $\hat{\mathcal{E}}$ son complété vectoriel. L'espace $\bar{P} = \mathbb{P}(\hat{\mathcal{E}})$ est le complété projectif de $\mathcal{E}$. L'hyperplan $\mathbb{P}(E)$ est l'hyperplan à l'infini de $\mathcal{E}$

Résumons les propriétés de ce complété en identifiant à la fois $\mathbb{P}(E)$ et $\mathcal{E}$ comme des sous-ensembles de $\bar{P}$.

Proposition 4.2.6. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace tangent E . l'espace projectif de E se plonge comme un hyperplan projectif de $\bar{P}$, de telle sorte que la carte affine correspondante s'identifie à $\mathcal{E}$. Ainsi $\bar{P} = \mathcal{E} \cup \mathbb{P}(E)$.

4.3 Sous-espaces projectifs

Définition 4.3.1. Une sous-variété linéaire – ou sous-espace projectif – de dimension m de $\mathbb{P}(V)$, c'est l'image d'un sous-espace vectoriel $W \subset V$ de dimension $m + 1$. D'où des points, droites, des plans, des hyperplans. La codimension de $Q \subset \mathbb{P}^d$, c'est $d - \dim(Q)$.

4.3.1 Intersection de sous espaces projectifs

Théorème 3. Dans $\mathbb{P}^2$, deux droites distinctes se coupent en un point exactement. Plus généralement, dans $\mathbb{P}^d$, l'intersection de deux sous-variétés linéaires de codimensions c et c' est une sous-variété linéaire de codimension $\leq c + c'$ si elle est non vide. Cette intersection est non vide si $c + c' \leq d$.

4.3.2 Sous-espaces projectifs et cartes affines

Nous avons les deux résultats suivants.

Théorème 4. Soit $\mathbb{P}(W)$ un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$. Soit P un hyperplan vectoriel de V et O_P la carte affine associée. Alors

- soit $\mathbb{P}(W)$ est inclus dans l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}(P)$ de O_P ,
- soit $\mathbb{P}(W) \cap O_P$ est un sous-espace affine de même dimension que $\mathbb{P}(W)$ dont l'espace tangent est $P \cap W$. Dans ce cas, $\mathbb{P}(P) \cap \mathbb{P}(W) = (P \cap W)$

Dans le premier cas on dit que $\mathbb{P}(W)$ est à l'infini de la carte. Dans le deuxième cas, on dit que $\mathbb{P}(P) \cap \mathbb{P}(W)$ est l'ensemble des points à l'infini du sous-espace affine $\mathbb{P}(W) \cap O_P$. Si $\mathbb{P}(W)$ est une droite projective on dit que le point d'intersection de $\mathbb{P}(W)$ avec $\mathbb{P}(P)$ est le *point de fuite* de cette droite.

Les point de fuite nous permettent de comprendre le parallélisme des droites affines dans le monde projectif.

Théorème 5. Deux droite projectives distinctes sont parallèles dans des cartes affines, si et seulement si elles ont le même point de fuite.

Deux hyperplan projectifs distincts sont parallèles dans une carte affine si et seulement si leur intersection est à l'infini.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Si $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. alors $\bar{\mathcal{A}}$ s'injecte comme un sous-espace projectif de $\mathcal{E}$ de telle sorte que $\bar{\mathcal{A}} \cap \mathcal{E} = \mathcal{A}$ et $\bar{\mathcal{A}} \cap \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A)$.
2. Si D est une droite affine, son hyperplan à l'infini est réduit à un point, le point à l'infini de D .
3. Si E est un espace affine d'hyperplan à l'infini H , à chaque droite affine $D \subset E$ est associé un point $F_D \subset H$, son *point de fuite*. Deux droites ont même point de fuite si et seulement si elles sont parallèles.
4. Plus généralement, si $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine, son hyperplan à l'infini s'envoie dans l'hyperplan à l'infini H de $\mathcal{E}$, deux sous-espaces donnent la même sous-variété linéaire de H si et seulement ils sont parallèles – c'est à dire si ils ont le même sous-espace tangent.
5. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites affines. Soit $\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{A}}'$ les droites projectives correspondantes dans la complétion projective de $\mathcal{E}$. Alors $\bar{\mathcal{A}} \cap \bar{\mathcal{A}}'$ est
 - ou bien un point de $\mathcal{P}$, si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes,

- ou bien le point de fuite commun de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ si elles sont parallèles.

Pour démontrer ces deux théorèmes on a besoin d'un lemme de géométrie affine.

Lemme 4.3.2. *Soit P un hyperplan vectoriel de V . Soit $\mathcal{P}$ un hyperplan affine parallèle à P . Soit W un sous-espace vectoriel qui n'est pas inclus dans P , alors $W \cap \mathcal{P}$ est un sous-espace affine d'espace tangent $W \cap P$.*

4.4 Coordonnées homogènes

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E

Définition 4.4.1. *Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des scalaires non tous nuls. On dit que la droite D a pour coordonnées homogènes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et on note*

$$D = [\lambda_1 : \dots : \lambda_n],$$

si $\sum_i \lambda_i e_i \in D$.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. On a l'égalité $[\lambda_1 : \dots : \lambda_n] = [\mu_1 : \dots : \mu_n]$ si et seulement si il existe un t non nul tel que pour tout i , $\lambda_i = t\mu_i$.
2. Si P est l'hyperplan engendré par $e_2, \dots, e_n$, la carte affine associée à P comme l'ensemble des points $[\lambda_1 : \dots : \lambda_n]$ tels que $\lambda_i \neq 0$. On obtient une bijection de O_P avec $\mathbb{K}^{n-1}$ donnée par

$$[\lambda_1 : \dots : \lambda_n] \rightarrow \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right),$$

dont l'inverse est

$$(x_2, \dots, x_n) \rightarrow [1 : x_2 : \dots : x_n].$$

3. Montrez que $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est la réunion de $n + 1$ -cartes affines.

4.5 Repères projectifs

Choisir une base de V donne dans $\mathbb{P}(V)$ des coordonnées homogènes. Une autre base, même si elle se projette sur les mêmes points de $\mathbb{P}(V)$, ne donne pas les mêmes coordonnées homogènes. Il faut donc se donner un point de plus pour fabriquer des coordonnées homogènes uniques.

Position générale

REMARQUES : r points d'un espace projectif sont toujours contenus dans une plus petite sous-variété linéaire. On dit qu'ils l'*engendrent*. Sa dimension est $\leq r - 1$.

Définition 4.5.1. r points d'un espace projectif sont projectivement indépendants (ou forment un système projectivement libre) s'ils ne sont contenus dans aucune sous-variété linéaire de dimension $< r - 1$.

EXEMPLE : Deux points sont projectivement indépendants si et seulement si ils sont distincts. Trois points sont projectivement indépendants si et seulement si ils ne sont pas alignés.

Plus généralement, des points *en position générale* sont projectivement indépendants, au sens suivant : être en position non générale signifie satisfaire une relation linéaire.

Repères

Définition 4.5.2. Soit V un espace vectoriel de dimension $n + 1$. $n + 2$ points de $\mathbb{P}(V)$ forment un repère projectif si tout sous-ensemble de $n + 1$ points est projectivement libre.

EXEMPLE : Dans une droite projective, trois points forment un repère projectif si et seulement si ils sont deux à deux distincts.

Théorème 6. Soit $(P_0, \dots, P_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$. Il existe des vecteurs $e_0 \in p_0, \dots, e_{n+1} \in p_{n+1}$ tels que $e_{n+1} = e_0 + \dots + e_n$. Ils sont uniques à un scalaire commun près.

Corollaire 4.5.3. Soit $(P_0, \dots, P_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$. Il existe des coordonnées homogènes uniques telles que

$$\begin{aligned} P_0 &= [1 : 0 : \dots : 0] \\ &\vdots \\ P_n &= [0 : 0 : \dots : 1] \\ P_{n+1} &= [1 : 1 : \dots : 1] \end{aligned}$$

EXERCICE : Comment les coordonnées homogènes changent-elles quand on permute les points p_i ?

REMARQUES :

1. On se donne des coordonnées homogènes. Alors tout sous-espace projectif est donné par des équations linéaires dans ces coordonnées. Par exemple un hyperplan peut toujours s'écrire sous la forme

$$P = \{[x_1 : \dots : x_n] \mid \sum_i a_i x_i = 0\}.$$

2. Dans la carte affine

$$O = \{[x_1 : \dots : x_n] \mid x_1 \neq 0\},$$

l'hyperplan affine $P \cap O$ est donné par l'équation affine

$$a_1 + \sum_{i>1} a_i x_i = 0.$$

3. Si enfin un hyperplan affine est donné par l'équation

$$a_1 + \sum_{i>1} a_i x_i = 0,$$

Alors l'équation du sous-espace projectif correspondant dans le complété projectif est

$$a_1 x_1 + \sum_{i>1} a_i x_i = 0,$$

Fin du cours n^03

4.6 Applications projectives

Définition 4.6.1. Soit V et V' des espaces vectoriels. Toute application linéaire non nulle $M : V \rightarrow V'$ définit une application $f_M : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ définie sur le complémentaire de la sous-variété linéaire $\mathbb{P}(\text{Ker} M)$, appelée application projective associée.

Exemple : Toute application affine $E \rightarrow E'$ se prolonge en une application projective entre complétions projectives, unique à translation près. L'action sur les hyperplans à l'infini $\mathbb{P}(T) \rightarrow \mathbb{P}(T')$ est induite par la partie linéaire, qui envoie T dans T' .

Exemple : Soit $A, B \subset \mathbb{P}(V)$ des sous-variétés linéaires disjointes, telles que $\dim A = \text{codim} B - 1$. Si $p \in \mathbb{P}(V) \setminus A$, il existe une unique droite projective passant par p et coupant à la fois A et B , en des points $f(p)$ et $g(p)$. On appelle f la projection sur A de centre B et g la projection sur B de centre A .

Si A est de dimension 0, on retrouve la prise de vue du cours sur la perspective. Si A est contenu dans l'hyperplan à l'infini, la projection sur B de centre A est affine, c'est la projection sur la partie à distance finie de B , parallèlement au sous-espace vectoriel dont la direction est A .

Proposition 4.6.2. Deux applications linéaires définissent la même application projective si et seulement si elles sont proportionnelles.

Corollaire 4.6.3. Le groupe $\text{PGL}(V)$ des bijections projectives de $\mathbb{P}(V)$ est isomorphe au quotient du groupe linéaire $\text{GL}(V)$ par le sous-groupe $\mathbb{K}^*$ des multiples de l'identité, $\text{dPGL}(V) \simeq \text{GL}(V)/\mathbb{K}^*$.

Les bijections projectives sont caractérisées par l'image d'un repère.

Proposition 4.6.4. *Soit $(p_0, \dots, p_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$. Soit $q_0, \dots, q_{n+1}$ $n+2$ points de $\mathbb{P}(V')$ qui forment un repère. Alors il existe une unique application projective $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ envoyant les p_j sur les q_j .*

DÉMONSTRATION : On considère les coordonnées homogènes associées à ces deux repères. Alors la bijection correspondante est donnée par l'application identité dans ces coordonnées : celle qui associe à un point, le point qui a les mêmes coordonnées homogènes. $\square$

EXERCICE : Cas où $n = 1$. Une application projective non constante d'une droite projective est automatiquement définie partout, et c'est une bijection sur une droite de l'espace d'arrivée. Ce n'est pas le cas pour la vue en perspective d'une droite. Expliquer ce qui se passe.

Définition 4.6.5. *Une action d'un groupe G sur un ensemble E est transitive s'il n'y a qu'une orbite, i.e. pour tous $x, x' \in E$, il existe $g \in G$ tel que $gx = x'$. Si, de plus, ce g est unique, on dit que l'action est simplement transitive.*

Corollaire 4.6.6. *Le groupe projectif $\mathrm{PGL}(V)$ agit simplement transitivement sur les repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$.*

4.6.1 Le groupe des homographies

Définition 4.6.7. *On note $\mathrm{dPGL}(n, \mathbb{K}) = \mathrm{PGL}(\mathbb{K}^n)$.*

Lorsque $n = 2$, $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{K})$ agit sur la droite projective. Sur la droite affine $p(\mathbb{K} \times \{1\}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, l'action est par homographies

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x \right) \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Le point $x = -\frac{d}{c}$ est envoyé sur le point $\infty = [1 : 0]$. Celui-ci est envoyé sur $\frac{a}{c}$ si $c \neq 0$, sur lui-même sinon.

Au paragraphe précédent, on a démontré le résultat suivant.

Corollaire 4.6.8. *Le groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{K}) = \mathrm{PGL}(\mathbb{K}^2)$ agit simplement transitivement sur les triplets de points distincts de la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.*

Définition 4.6.9. *Soit D une droite projective. Soit a, b, c, d quatre points de D , avec a, b, c distincts. On note $[a, b, c, d]$ le point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, image de d par l'unique bijection projective $h : D \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ telle que*

$$h : a \mapsto \infty, \quad b \mapsto 0, \quad c \mapsto 1.$$

Par définition, le birapport est invariant par bijection projective.

4.6.2 Sous-groupes du groupe projectif : les transformations affines

Proposition 4.6.10. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine modelé sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Soit $\hat{\mathcal{E}} = E \oplus \mathbb{K}$, son complété vectoriel.*

1. *Soit A le sous-groupe de $\mathrm{PGL}(\hat{\mathcal{E}})$ qui laisse stable l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}(E)$. Alors A est isomorphe au groupe affine de E .*
2. *Soit H le sous-groupe qui fixe l'hyperplan à l'infini point par point. Alors H est isomorphe au groupe des homothéties-translations de E .*

4.7 Dualité

Proposition 4.7.1. *L'ensemble des hyperplans projectifs de $\mathbb{P}(V)$ s'identifie à $\mathbb{P}(V^*)$. Une fois fixé un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$, un hyperplan est donné par une équation linéaire en coordonnées homogènes. Les coefficients de cette équation constituent des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(V^*)$.*

EXERCICE : Soit Δ une droite d'un plan projectif $\mathbb{P}(V)$. Montrer que l'application $\mathbb{P}(V^*) \rightarrow \Delta$, $D \mapsto D \cap \Delta$ est projective.

Définition 4.7.2. *A une droite de $\mathbb{P}(V^*)$ correspond une famille à un paramètre d'hyperplans de $\mathbb{P}(V)$ appelée faisceau d'hyperplans.*

Proposition 4.7.3. *Un faisceau, c'est l'ensemble des hyperplans qui contiennent une même sous-variété linéaire de codimension 2.*

4.7.1 Dualité dans le plan projectif

EXEMPLE : Un faisceau de droites dans le plan, c'est l'ensemble des droites passant par un point.

Moralité : en géométrie projective plane, points et droites s'échangent. Cet échange est donné par la correspondance suivante

Un point P de $\mathbb{P}(E) \rightarrow$ une droite vectorielle P de $E \rightarrow$ un plan vectoriel $P^\perp$ de $E^ \rightarrow$ la droite $\mathbb{P}(P^\perp)$ de $\mathbb{P}(E^*)$.*

Une droite D de $\mathbb{P}(E) \rightarrow$ un plan vectoriel Q de E tel que $\mathbb{P}(Q) = D \rightarrow$ une droite vectorielle de $Q^\perp$ de $E^ \rightarrow$ un point $Q^\perp$ de $\mathbb{P}(E^*)$.*

Dans cet échange, à l'intersection de deux droites projectives correspond la droite projective passant par les deux points duaux. Ainsi, dire que des droites sont concourantes revient à dire que leur duaux sont alignés.

A chaque énoncé concernant des droites correspond un énoncé dual concernant des points.

Définition 4.7.4. *Le birapport de quatre droites concourantes du plan est le birapport des quatres points duaux (qui sont alignés).*

Proposition 4.7.5. *Le birapport de quatres droites concourantes est égal au birapport de leurs points d'intersection avec une cinquième droite D qui ne leur est pas concourante.*

DÉMONSTRATION : On note O_0 le point de concurrence des droites $D_1, \dots, D_4$, D la cinquième droite et O_i l'intersection de D_i avec D . On choisit un point B tel que O_0, O_1, O_2, B soit un repère. Dans les coordonnées homogènes correspondantes on a $O_0 = [1 : 0 : 0 : 0]$, $O_1 = [0 : 1 : 0 : 0]$, $O_2 = [0 : 0 : 1 : 0]$, $O_3 = [0 : \alpha : 1 : 0]$ et $O_4 = [0 : \beta : 1 : 0]$ d'où $\beta/\alpha = [O_1, O_2, O_3, O_4]$.

Soit (f_0, f_1, f_2) la base duale de (e_0, e_1, e_2) . Alors, le point dual de D_1 est engendré par f_2 , il est donc de coordonnées $[0 : 0 : 1]$. De même, les coordonnées des duals de D_2, D_3 et D_4 sont $[0 : 1 : 0]$, $[0 : -\alpha : 1]$ et $[0 : -\beta : 1]$. L'identification de $\mathbb{P}^1(K)$ avec la droite duale de O donné par $t \rightarrow [0 : t : 1]$ envoie D_1 sur 0, D_2 sur ∞ , D_3 sur $-\alpha$ et D_4 sur $-\beta$. Le résultat suit $\square$

Voici un point de vue plus abstrait sur ce résultat. On choisit une forme Ω alternée de degré 3 non nulle sur V^* . Le produit extérieur $w \wedge v$ de deux vecteurs de V^* est le vecteur de V défini par

$$\Omega(w, v, u) := \langle u, w \wedge v \rangle.$$

On vérifie alors que l'application $(w, v) \rightarrow w \wedge v$ est bilinéaire et le vecteur $w \wedge v$ engendre l'intersection des noyaux de w et v si ces deux formes ne sont pas colinéaires.

Nous avons alors

Proposition 4.7.6. *Soit A un point de $\mathbb{P}(V)$ et Δ une droite ne passant pas par A . L'application de A^* – la droite duale du point A vue comme une droite de $\mathbb{P}(V^*)$ – dans Δ qui à la droite D associe l'intersection de D et Δ est une application projective.*

DÉMONSTRATION : Soit en effet v un vecteur non nul de Δ – vu comme une droite de l'espace vectoriel dual. L'application linéaire $w \rightarrow w \wedge v$ définie de A^* – vu comme un plan de l'espace vectoriel dual dans Δ – vu comme un plan de l'espace vectoriel, a comme application projective associée $D \rightarrow D \cap \Delta$. En particulier l'application $D \mapsto D \cap \Delta$ provient d'une application linéaire, elle est donc projective.

Nous donnons maintenant une preuve plus calculatoire de ce résultat. On peut choisir des coordonnées homogènes sur le plan projectif tel que le point A soit de coordonnées $[1 : 0 : 0]$ et la droite Δ soit de coordonnées duales $[1 : 0 : 0]$. La droite duale A^* de A est donc l'ensemble des points dont les coordonnées duales sont

$$[0 : s : t].$$

Un point M de Δ est de coordonnées homogènes $[0 : s : t]$. La droite passant par A et M est

$$\{[u : vs : vt] \mid (u, v) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0, 0\}\}.$$

Cette droite a donc pour coordonnées duales $[0 : -t : s]$. Autrement dit, en coordonnées, l'application de Δ dans A^* est donnée par $[s : t] \mapsto [-t : s]$, c'est en particulier une homographie. $\square$

Une bijection projective préservant le birapport, nous retrouvons comme corollaire la proposition précédente.

EXERCICE : Montrez que l'énoncé précédent entraîne la généralisation suivante du théorème de Thalès. Si A, B et C , respectivement A', B' et C' sont trois points d'une droite D , respectivement D' , alors

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

si et seulement si les droites AA' , BB' et CC' sont concourrantes ou alignées.

On utilisera le fait que si on a trois points a , b et c d'une droite affine le nombre λ tel que $a - b = \lambda(a - c)$ s'interprète comme le birapport des quatres points a , b , c et ∞ dans le complété projectif de cette droite affine.

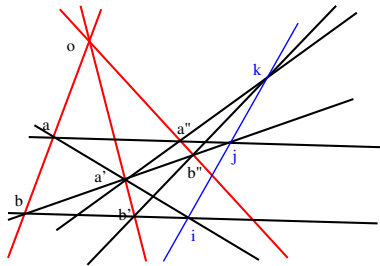
Fin du cours n^{05}

Chapter 5

Les grands théorèmes

5.1 Le théorème de Desargues

Théorème 7. [G. DESARGUES (1639)]. Dans un espace projectif, soit D, D', D'' trois droites distinctes et concourantes en o . On choisit sur chacune deux points distincts a et b (resp. a' et b' , resp. a'' et b'') et distincts de o . Alors les points $i = aa' \cap bb'$, $j = aa'' \cap bb''$ et $k = a'a'' \cap b'b''$ sont alignés.



REMARQUES :

1. Les hypothèses garantissent que les droites aa' et bb' sont distinctes, et se coupent donc en un point. De même pour les deux autres paires de droites.
2. Tout se passe dans la sous-variété linéaire engendrée par les droites D, D' et D'' , qui est de dimension au plus égale à 3. Il s'agit donc d'un résultat de géométrie dans l'espace (de dimension 3) ou dans le plan. Paradoxalement, la preuve est plus facile dans l'espace que dans le plan.

DÉMONSTRATION : Voici une première démonstration utilisant le fait que $\mathbb{K}$ est commutatif. On suppose que i, j, k ne sont pas alignés. On considère un hyperplan contenant i et j mais pas k que l'on envoie à l'infini. Une double application du Théorème de Thalès montre alors que bb'' et aa'' sont parallèles et la contradiction.

Voici une autre preuve

1. Cas où les droites D, D' et D'' engendrent une sous-variété linéaire de dimension 3.

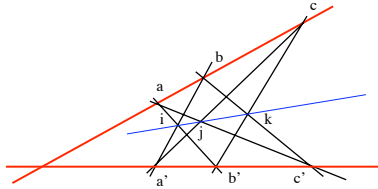
Dans ce cas, les points a, a' et a'' sont projectivement indépendants et engendrent un plan Π . De même, b, b' et b'' engendrent un plan Π' . Ces plans sont distincts. Leur intersection est une droite, qui contient nécessairement les trois points i, j et k .

2. Cas où les droites D, D' et D'' engendrent une sous-variété linéaire de dimension 2.

On plonge cette sous-variété P dans un espace projectif de dimension 3. On remplace D'' par une droite Δ'' passant par o mais non contenue dans P . On applique le théorème de Desargues à D, D' et Δ'' , cela donne trois points i, j'' et k'' alignés sur une droite Δ' . On choisit un centre de projection c dans le plan engendré par D'' et Δ'' , mais hors des droites Δ', D'' et Δ'' . La projection de centre c sur le plan P envoie j'' et k'' sur j et k , donc les points i, j et k sont alignés le long de la projection de Δ' . $\square$

5.2 Le théorème de Pappus

Théorème 8. [PAPPUS (4^E SIÈCLE DE NOTRE ÈRE)]. *Dans un plan projectif, soit D et D' deux droites distinctes et concourantes en o . On choisit sur chacune trois points distincts a, b et c (resp. a', b' et c') et distincts de o . Alors les points $i = ab' \cap ba'$, $j = ac' \cap ca'$ et $k = bc' \cap cb'$ sont alignés.*



REMARQUES : Les hypothèses garantissent que les droites ab' et ba' sont distinctes, et se coupent donc en un point. De même pour les deux autres paires de droites.

DÉMONSTRATION :

Une première preuve consiste à envoyer la droite passant par i et j à l'infini et se ramener ainsi au Théorème de Thalès. La preuve qui suit utilise des coordonnées homogènes.

1. Cas où les points i, c et c' ne sont pas alignés.

Dans ce cas, c, c', i et o forment un repère projectif. Soit α (resp. β) la pente de la droite ab' (resp. ba'). Alors

$$c = [1 : 0 : 0], \quad c' = [0 : 1 : 0], \quad i = [0 : 0 : 1], \quad o = [1 : 1 : 1].$$

En coordonnées affines,

$$a = (\alpha^{-1}, 1), \quad b = (\beta^{-1}, 1), \quad a' = (1, \beta), \quad b' = (1, \alpha).$$

Enfin

$$j = ac' \cap ca' = (\alpha, \beta^{-1}), \quad k = bc' \cap cb' = (\beta, \alpha^{-1}).$$

Si le corps de base est commutatif,

$$\beta\alpha^{-1}j = (\beta, \beta\alpha^{-1}\beta^{-1}) = (\beta, \alpha^{-1}) = k,$$

donc les points i, j et k sont sur la droite d'équation $x_0 - \alpha\beta x_1 = 0$.

2. Cas où les points i, c et c' sont alignés.

Choisissons un repère projectif commençant par $c = [1 : 0 : 0]$, $c' = [0 : 1 : 0]$ et $o = [0 : 0 : 1]$. La droite oc (resp. oc') a pour équation $y = 0$ (resp. $x = 0$), donc $a = [\alpha : 0 : 1]$, $b = [\beta : 0 : 1]$, $a' = [0 : \alpha' : 1]$, $b' = [0 : \beta' : 1]$. $i \in cc'$ est sur la droite à l'infini, donc, comme droites affines, ab' et ba' sont parallèles. Par conséquent, $\alpha\alpha' = \beta\beta'$. Alors

$$i = [\alpha : -\beta' : 0], \quad j = [\alpha : \alpha' : 1], \quad k = [\beta : \beta' : 1]$$

sont sur la droite d'équation $\beta'x + \alpha y - \beta'(\alpha + \beta)z = 0$. □

REMARQUES : Le deuxième cas ne se produit pas lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mais se produit lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.3 Le théorème fondamental de la géométrie projective

Question. Les bijections projectives sont-elles les seules bijections entre espaces projectifs qui préservent l'alignement des points ? Pas exactement.

EXEMPLE : La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ induit une bijection de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ qui préserve l'alignement.

En effet, elle se relève en une bijection antilinéaire de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui préserve les sous-espaces vectoriels complexes.

Théorème 9. Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit $n \geq 2$. Soit $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ une bijection qui envoie les triplets de points alignés sur des triplets de points alignés. Alors il existe un unique automorphisme σ du corps $\mathbb{K}$ tel que f se relève en une bijection σ -antilinéaire de $\mathbb{K}^{n+1}$, i.e. un automorphisme F du groupe additif tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$F(\lambda v) = \sigma(\lambda)F(v).$$

5.3.1 Géométrie d'incidence

Définition 5.3.1. Une géométrie d'incidence, c'est la donnée d'un ensemble $\mathbb{P}$ muni d'une famille non vide de parties non vides appelées droites, sujette aux axiomes suivants.

1. Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.
2. Deux droites distinctes ont un point commun et un seul.
3. $\mathbb{P}$ n'est pas la réunion de deux droites.

Question. Les plans projectifs sont-ils les seules géométries d'incidence ? Pas exactement.

Théorème 10. Soit $\mathbb{P}$ une géométrie d'incidence satisfaisant au théorème de Desargues. Alors il existe un corps $\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{P}$ soit isomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.

REMARQUES :

1. Le corps $\mathbb{K}$ n'est pas nécessairement commutatif. Il l'est si et seulement si le théorème de Pappus est vrai dans $\mathbb{P}$.
2. Il existe des géométries d'incidences non *arguésiennes*, i.e. qui ne satisfont pas au théorème de Desargues. Par exemple, le plan projectif associé à l'algèbre (non associative) des octonions ou octaves de Cayley.

Chapter 6

Coniques et quadriques

Dans toute cette section, le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nous donnerons en exercice les résultats correspondants pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

6.1 Coniques et quadriques

Définition 6.1.1. Une quadrique de $\mathbb{P}(V)$, c'est la projection du lieu des zéros d'une forme quadratique de V . En dimension 2, on parle de conique.

Cette définition peut-être donnée sur tous les corps. Dans le cas du corps des complexes qui est celui de ce chapitre, nous avons

Proposition 6.1.2. Deux formes quadratiques définissent la même quadrique si et seulement si elles sont proportionnelles.

DÉMONSTRATION : On se donne une première forme quadratique q . Il existe une base de V telle que cette forme quadratique s'exprime dans cette base sous la forme

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{i=p} x_i^2.$$

On se donne une deuxième forme quadratique

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{i=p} b_{i,j} x_i x_j.$$

On suppose que les deux quadriques associées sont identiques. On obtient le résultat en raisonnant pour $n = 2$, puis en raisonnant sur les plans de coordonnées. $\square$

Définition 6.1.3. Le rang d'une quadrique est celui d'une forme quadratique qui la définit. Une quadrique de rang maximal est non dégénérée.

EXERCICE :

1. En dimension 1, une quadrique dégénérée, c'est un point, une quadrique non dégénérée deux points.
2. En dimension 2, une conique dégénérée est
 - ou bien la réunion de deux droites (rang 2),
 - ou bien une droite de multiplicité 2 (rang 1).
3. La proposition précédente est-elle vraie si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? Montrez cependant que si une quadrique est non vide et associée à une forme quadratique non dégénérée q alors toute autre forme quadratique qui définit cette quadrique est proportionnelle à q . On peut donc aussi parler de quadrique non dégénérée si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 6.1.4. *Le groupe $\mathrm{PGL}(V)$ agit transitivement sur l'ensemble des quadriques non dégénérées de $\mathbb{P}(V)$.*

6.2 Plan tangent

Définition 6.2.1. *Soit Q une quadrique non dégénérée. L'hyperplan projectif tangent en p à Q est $T_p Q = \mathbb{P}(p^\perp)$, où $p^\perp$ est l'orthogonal de p pour la forme quadratique définissant Q .*

Cette définition s'étend aussi naturellement pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 6.2.2. *Soit Q une quadrique non dégénérée définie par q . L'équation homogène de son hyperplan tangent en p s'écrit*

$$\frac{\partial q}{\partial x_0}(p_0, \dots, p_n)X_0 + \dots + \frac{\partial q}{\partial x_n}(p_0, \dots, p_n)X_n = 0.$$

Autrement dit, les coordonnées homogènes du plan tangent $T_p Q \in \mathbb{P}(V^)$ sont les dérivées partielles de q en un $v \in p \subset V$.*

DÉMONSTRATION : Fixons une base de V . Soit Q la matrice de q , soit $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ la colonne des

composantes d'un vecteur directeur p de la droite p . Soit $v \in V$, de composantes $X = \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

Alors $q(v) = X^T Q X$, $q(p, v) = p^T Q X$. L'hyperplan tangent est le projectivisé de $p^\perp$, dont l'équation est $p^T Q X = 0$. Or $d_p q = 2p^T Q dX$. $\square$

On verra plus tard que cette notion coïncide avec la notion usuelle de tangence.

Proposition 6.2.3. *Soit Q une quadrique non dégénérée, alors*

$$\mathrm{rang}(Q \cap T_p Q) = \mathrm{rang} Q - 2.$$

Réciproquement, un hyperplan D est tangent à C si et seulement si la quadrique $C \cap D$ de D est dégénérée.

DÉMONSTRATION : Comme q est non dégénérée si H est un hyperplan, $\ker(q|_H) = (H^\perp) \cap H$. Le résultat suit aisément de la manière suivante

Si $H = p^\perp$ avec $p \in Q$, alors $p \subset H$ et donc $\ker(q|_H) = p$. Ainsi $\dim \ker(q|_H) = 1$.

Enfin si $\ker(q|_H)$ est non trivial on a donc $\ker(q|_H) = H^\perp$ et donc $p = H^\perp \cap H \in C$ et $H = T_p C$.

□

Corollaire 6.2.4. 1. En dimension 2, une droite coupe une conique C non dégénérée en 2 points, sauf si elle lui est tangente.

2. En dimension 3, par tout point d'une quadrique non dégénérée Q passent 2 droites contenues dans Q .

EXEMPLE : Considérons la conique affine C d'équation $2x^2 + xy - y^2 + 2x + y - 1$. Ce sont les points à distance finie – c'est à dire dans une carte affine – de la conique projective C d'équation homogène $2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_0x_1 + x_1x_2 + 2x_2x_0 = 0$. Sa tangente en $p = [x_0 : x_1 : x_2]$ est la droite d'équation homogène $(4x_0 + x_1 + 2x_2)X_0 + (x_0 - 2x_1 + x_2)X_1 + (2x_0 + x_1 - 2x_2)X_2 = 0$. Si $p = [1 : -1 : 1]$, cela donne $5X_0 + 4X_1 - X_2 = 0$. Ses points à distance finie forment la droite affine d'équation $5x + 4y = 1$, qui est bien la tangente à C en $p = (1, -1)$.

6.3 Polarité

Définition 6.3.1. Fixons une quadrique non dégénérée $Q \subset \mathbb{P}(V)$. A tout point $p \in \mathbb{P}(V)$ correspond son hyperplan polaire p^0 , projectivisé de l'hyperplan vectoriel $p^\perp \subset V$ orthogonal de p pour q . De même, à tout hyperplan correspond un point polaire.

Proposition 6.3.2. L'application qui à un point associe son hyperplan polaire est une application projective.

DÉMONSTRATION : En effet, c'est l'image de Q par la bijection projective $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ induite par la différentielle de q , qui est un isomorphisme $V \rightarrow V^*$. □

Proposition 6.3.3. Fixons une conique non dégénérée $Q \subset \mathbb{P}(V)$. Soit p un point de $\mathbb{P}(V)$.

- Si $p \in Q$, p^0 est la tangente à Q en p .
- Si $p \notin Q$, p^0 coupe Q en deux points q_1 et q_2 tels que les droites passant par q_i sont les deux tangentes à Q passant par p .

DÉMONSTRATION : Le cas où $p \in Q$ résulte de la définition de la droite tangente.

Si $p \notin Q$, $V = \mathbb{C}p \oplus p^\perp$ est une somme orthogonale, la restriction de q à $p^\perp$ est non dégénérée, donc la polaire $p^0 = \mathbb{P}(p^\perp)$ coupe Q en deux points distincts u et v . Comme $u \subset p^\perp$ et u est isotrope, u est dans le noyau de la restriction de q au plan P engendré par p et u . Celle-ci est dégénérée, donc pu est tangente à Q .

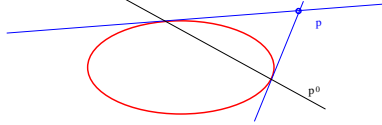
Réciproquement, si $w \in Q$ et si la droite projective pw est tangente à Q alors les droites vectorielles p et w sont orthogonales et donc w appartient à la polaire de p .

□

Corollaire 6.3.4. *L'ensemble des hyperplans tangents à une quadrique est une quadrique appelée quadrique duale.*

EXERCICE : Donnez l'équation en coordonnées homogènes de la conique duale à la conique

$$Q = \{[x : y : z] \mid xy - z^2 = 0\}.$$



6.4 Groupes et coniques

Lemme 6.4.1. *Soit p, q et v trois points d'une conique non dégénérée Q . Soit $m = T_p Q \cap T_q Q$. Soit v un autre point de Q . On considère le repère projectif (p, q, m, v) alors dans les coordonnées homogènes correspondantes, l'équation de la quadrique est*

$$Q = \{[x : y : z] \mid xy - z^2 = 0\}$$

DÉMONSTRATION : Par définition, $p = [1 : 0 : 0]$, $q = [0 : 1 : 0]$, $m = [0 : 0 : 1]$ et $v = [1 : 1 : 1]$. De même, $T_p Q = [0 : 1 : 0]$ et $T_q Q = [1 : 0 : 0]$. La quadrique est d'équation

$$Q = \{[x : y : z] \mid ax^2 + by^2 + cz^2 + uxy + vxz + wzy = 0\}.$$

Donc $T_{[x:y:z]} Q = [2ax + uy + vz : 2by + ux + wz : 2cz + vx + wy]$. Nous obtenons donc les équations

$$\begin{aligned} a = v &= 0, \\ b = w &= 0, \\ c + w &= 0. \end{aligned}$$

□

Si Q est une quadrique non dégénérée notons $PO(Q)$ le sous-groupe de $PGL(V)$ qui laisse stable la quadrique Q . $PO(Q) = \{f \in PGL(V) \mid f(Q) = Q\}$.

Corollaire 6.4.2. *Le groupe $PO(Q)$ agit transitivement sur les triplets de points distincts d'une conique.*

6.5 Paramétrisation unificatrice des coniques

Rappelons que l'ensemble des hyperplans projectifs passant par un point p s'appelle un *faisceau d'hyperplans* et s'identifie par dualité au dual du point p .

Définition 6.5.1. Soit Q une conique non dégénérée. Soit $p \in Q$. Soit $\mathcal{F}$ le faisceau des droites passant par p . On appelle paramétrisation unicursale de Q , l'application $\mathcal{F} \rightarrow Q$,

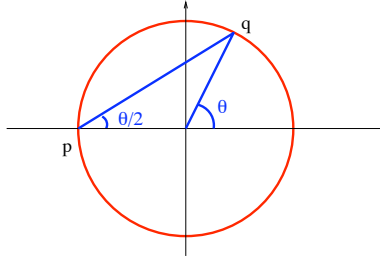
$$\begin{cases} D \mapsto q, \text{ où } D \cap Q = \{p, q\} \text{ si } D \neq T_p Q, \\ T_p Q \mapsto p. \end{cases} \quad (6.1)$$

Proposition 6.5.2. Toute paramétrisation unicursale est une bijection rationnelle, c'est-à-dire donnée en coordonnées homogènes par des fractions rationnelles qui ne s'annulent pas simultanément.

EXEMPLE : Soit C le cercle unité d'équation affine $x^2 + y^2 = 1$ et $p = (-1, 0)$. Une droite passant par p est représentée par la pente t . La paramétrisation obtenue est donnée en coordonnées affines par $t \mapsto \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$, ou bien, en coordonnées homogènes, par

$$[t_0 : t_1] \mapsto [2t_0 t_1 : t_1^2 - t_0^2 : t_1^2 + t_0^2].$$

Dans la formule affine, on reconnaît l'expression de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.



DÉMONSTRATION : Nous choisissons des coordonnées homogènes telles que $p = [1 : 0 : 0]$ et

$$Q = \{[x : y : z] \mid xy - z^2 = 0\}.$$

Alors, $T_p Q$ est en coordonnées homogènes du dual défini par $[0 : 1 : 0]$. Le faisceau de droites $\mathcal{F}$ passant par p est l'ensemble des droites dont les coordonnées sont $[0 : a : b]$. Nous obtenons une paramétrisation de ce faisceau donnée par $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}$, $a \mapsto [0 : a : 1]$. Les points de cette droite différents de p sont les points de coordonnées $[x : -1 : a]$. Si $a \neq 0$, nous cherchons un point de cette droite différent de p , appartenant à Q , c'est-à-dire un complexe x tel que

$$x + a^2 = 0,$$

La paramétrisation unicursale est donc donnée dans ces coordonnées par

$$a \mapsto [-a^2 : -1 : a].$$

Elle s'étend en coordonnées homogènes par

$$[0 : a : b] \mapsto [-a^2 : -b^2 : ab],$$

qui envoie $T_p Q$ sur p . $\square$

Proposition 6.5.3. *Deux paramétrisations unicursales d'une même conique non dégénérée diffèrent par une homographie de la droite projective. Par conséquent, on peut parler du birapport de 4 points d'une conique, ainsi que du birapport de 4 tangentes.*

DÉMONSTRATION : On choisit des coordonnées homogènes dans lesquels $p = [1 : 0 : 0]$, $q = [0 : 1 : 0]$ et

$$Q = \{[x : y : z] \mid xy - z^2 = 0\}.$$

D'après ce qui précède la première paramétrisation est donné par

$$f : [0 : a : b] \mapsto [-a^2 : -b^2 : ab],$$

la deuxième par

$$f : [c : 0 : d] \mapsto [-d^2 : -c^2 : cd].$$

L'homographie

$$h : [0 : a : b] \mapsto [b : 0 : a],$$

est telle que $g \circ h = f$.

On peut aussi montrer qu'une bijection rationnelle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est automatiquement une homographie. On donnera au paragraphe suivant une troisième preuve (encore plus abstraite) de ce fait. $\square$

Corollaire 6.5.4. *Soit C une conique a, b, c, d , quatre points de cette conique. Soit p et q deux autres points de cette conique distincts des précédents alors*

$$[pa, pb, pc, pd] := [qa, qb, qc, qd].$$

EXERCICE : Soit a, b, c et d 4 points d'une conique non dégénérée C . Montrer que le birapport des tangentes est égal à celui des points,

$$[T_a C, T_b C, T_c C, T_d C] = [a, b, c, d].$$

Indication : Considérez la conique

$$Q = \{[x : y : z] \mid xy - z^2 = 0\},$$

calculez les coordonnées homogènes du plan tangent en tout point, donnez l'équation de sa conique duale et comparez les paramétrisations unicursales.

REMARQUES : Lien avec les formules trigo. Lien avec les triangles rectangles à côtés entiers.

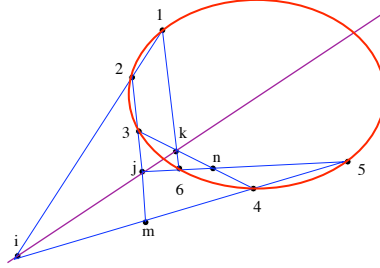
6.6 L'hexagramme mystique de Pascal

On rappelle que cinq points du plan projectif sont en position générale si trois d'entre eux ne sont jamais alignés.

Lemme 6.6.1. *Par 5 points en position générale passe une et une seule conique non dégénérée.*

Pour six points, la réponse est donnée par le théorème de Pascal

Théorème 11. [B. PASCAL (1640)]. *Les côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique non dégénérée se coupent suivant des points alignés. Autrement dit, si $1, 2, \dots, 5, 6$ sont des points distincts sur la conique, alors les points $i = 12 \cap 45$, $j = 23 \cap 56$ et $k = 34 \cap 61$ sont alignés. Réciproquement, tout hexagone dont les côtés opposés se coupent en des points alignés est inscrit dans une conique non dégénérée.*



Nous verrons comme corollaire un réciproque du corollaire 6.5.4

Corollaire 6.6.2. *Soit a, b, c, d, p cinq points distincts en position générale alors la conique passant par ces cinq points est l'ensemble des points q tels que*

$$[pa, pb, pc, pd] := [qa, qb, qc, qd].$$

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 6.6.3. *Soient, sur deux droites distinctes D et D' , sécantes en a , des points distincts b, c et d (resp. b', c' et d'), supposés tous distincts de a . Alors les droites bb', cc' et dd' sont concourantes si et seulement si $[a, b, c, d] = [a, b', c', d']$.*

DÉMONSTRATION : Si les droites bb', cc' et dd' sont concourantes en z , la projection de centre z de D sur D' est une bijection projective, donc elle préserve le birapport. Réciproquement, soit $z = bb' \cap cc'$, soit $d'' = D' \cap dz$. Alors $[a, b, c, d] = [a, b', c', d'']$. Si on suppose que $[a, b, c, d] = [a, b', c', d']$, alors $[a', b', c', d''] = [a, b', c', d']$, ce qui entraîne que $d'' = d'$. Autrement dit, bb', cc' et dd' sont concourantes. $\square$

DÉMONSTRATION :

Nous allons maintenant démontrer le lemme suivant

Lemme 6.6.4. *Reprenons les notations du théorème,*

$$[21, 23, 24, 25] = [61, 63, 64, 65],$$

si et seulement si I, J, K sont alignés.

DÉMONSTRATION : Soit $m = 23 \cap 45$ et $n = 34 \cap 56$. Alors

$$\begin{aligned} [i, m, 4, 5] &= [21, 23, 24, 25] \\ [61, 63, 64, 65] &= [k, 3, 4, n]. \end{aligned}$$

Dès lors

$$[21, 23, 24, 25] = [61, 63, 64, 65],$$

si et seulement si

$$[i, m, 4, 5] = [k, 3, 4, n].$$

D'après le lemme cette dernière égalité est vraie si et seulement si les droites ik , $m3 = 23$ et $5n = 56$ sont concourantes. Autrement dit, si et seulement si le point $j = 23 \cap 56$ appartient à la droite ik . $\square$

Démonstration du théorème de Pascal

Si les points sont sur une conique, d'après le corollaire 6.5.4, nous avons l'égalité

$$[21, 23, 24, 25] = [61, 63, 64, 65],$$

et donc d'après le lemme précédent les points I, J, K sont alignés.

Réciproquement, soit $1, 2, \dots, 5, 6$ des points du plan projectif en position générale, tels que les points $i = 12 \cap 45$, $j = 23 \cap 56$ et $k = 34 \cap 61$ sont sur une même droite D . Soit C l'unique conique non dégénérée passant par $1, 2, \dots, 5$. La droite 56 coupe C en un second point noté 7 . Comme l'hexagone $1, 2, \dots, 5, 7$ est inscrit dans C , les points i, j et $k' = 34 \cap 71$ sont alignés, donc $k' \in D$, $k' = D \cap 56 = k$, et enfin $6 = 1k \cap 56 = 1k' \cap 56 = 7$ est sur C . $\square$

Démonstration du corollaire

Si

$$[pa, pb, pc, pd] := [qa, qb, qc, qd].$$

alors, d'après le lemme, les côtés opposés s'intersectent en des points alignés. Le théorème de Pascal nous assure alors que les six points sont sur une conique. $\square$

EXERCICES :

1. Quel est l'énoncé dual du théorème de Pascal ?
2. Que devient le théorème de Pascal quand la conique dégénère vers une paire de droites distinctes ?

6.7 Le groupe projectif orthogonal

Définition 6.7.1. On note $\text{PO}(3, \mathbb{C})$ le sous-groupe de $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ qui laisse stable la conique non dégénérée d'équation homogène $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Pour en savoir plus sur ce groupe, on va étudier une conique naturelle, c'est l'ensemble des quadriques dégénérées de la droite projective.

REMARQUES : Soit $\mathbb{P}(V)$ une droite projective. L'espace des quadriques de $\mathbb{P}(V)$ est un plan projectif $\mathbb{P}(S^2 V^*)$, et les quadriques dégénérées forment une conique non dégénérée $\mathcal{QD} \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$.

En effet, l'espace S^2V^* des formes bilinéaires symétriques sur V est de dimension 2, le déterminant d'une matrice symétrique 2×2 est une forme quadratique non dégénérée. A une constante près, elle est invariante par chaque élément du groupe linéaire de V .

Corollaire 6.7.2. *Le stabilisateur d'une conique non dégénérée C agit transitivement sur le complémentaire de C ainsi que sur l'ensemble des droites non tangentes à C .*

DÉMONSTRATION : Pour la conique naturelle QD , le complémentaire est l'ensemble des quadriques non dégénérées, sur lequel l'image du groupe $PGL(V)$ dans $PGL(S^2V^*)$ agit déjà transitivement. $\square$

REMARQUES : Dans une droite projective $\mathbb{P}(V)$, une quadrique dégénérée, c'est un point de $\mathbb{P}(V)$. La bijection obtenue $b : \mathbb{P}(V) \rightarrow QD$ préserve le birapport.

En fait, b est une paramétrisation unicursale de QD . Fixons un point $o \in \mathbb{P}(V)$, ainsi qu'un vecteur directeur $z \in o$. Etant donné $v \in V$, la forme linéaire sur S^2V^* définie par $q \mapsto q(z, v)$ dépend linéairement de q . Cela donne une application linéaire injective $V \rightarrow (S^2V^*)^*$, donc une application projective $\iota : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}((S^2V^*)^*)$. Cette application est une paramétrisation projective du faisceau $\mathcal{F}$ des droites de l'espace des quadriques qui passent par le point $b(o)$. En effet, $b(o)$ est représenté par les formes quadratiques q dont le noyau est o , ces formes satisfont $q(z, v) = 0$ pour tout v . Pour la même raison, la droite $\iota(p)$ coupe QD en $b(p)$.

Calculatoirement, une quadrique affine de la droite, c'est le lieu des zéros d'un trinôme $x \mapsto x^2 + 2bx + c$. A chaque point a de la droite affine correspond la quadrique dégénérée $b(a) : x \mapsto (x - a)^2$. La droite $b(0)b(a)$ (dans l'espace affine des quadriques affines), est paramétrée par $t \mapsto (1 - t)b(0) + tb(a) = x \mapsto x^2 - 2tax + ta^2$, autrement dit, $b = -ta$, $c = ta^2$. Elle est donnée par l'équation affine $c = -ab$, autrement dit, sa pente est $-a$, c'est bien une fonction homographique de a .

Corollaire 6.7.3. *Toute bijection d'une conique non dégénérée qui préserve le birapport s'étend de façon unique en une bijection projective du plan projectif.*

DÉMONSTRATION : Pour la conique naturelle QD , une bijection projective est réalisée par un élément de $PGL(V)$, qui agit déjà sur $\mathbb{P}(S^2V^*)$. L'unicité vient du fait que 4 points distincts d'une conique forment un repère projectif. $\square$

REMARQUES : Soit $PO(QD)$ le sous-groupe du groupe projectif $PGL(S^2V^*)$ qui laisse stable la quadrique QD . Alors $PO(QD)$ est isomorphe à $PGL(V)$.

Corollaire 6.7.4. *Les groupes $PGL(2, \mathbb{C})$ et $PO(3, \mathbb{C})$ sont isomorphes.*

REMARQUES : Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

6.8 Division harmonique

Définition 6.8.1. On appelle *involution* une homographie h d'une droite projective telle que $h \circ h = \text{id}$ mais $h \neq \text{id}$.

EXEMPLE : Une quadrique non dégénérée d'une droite projective, c'est une paire de points distincts $Q = \{a, b\}$. La polarité $p \mapsto p^0$ par rapport à Q est une involution. Elle fixe a et b .

Proposition 6.8.2. Toute involution de la droite projective fixe deux points distincts a et b , et coïncide avec la polarité par rapport à la quadrique $Q = \{a, b\}$.

DÉMONSTRATION : Soit i une involution de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors i se relève en un endomorphisme I de $\mathbb{C}^2$ tel que I^2 est un multiple de l'identité. Par conséquent, I est diagonalisable. Comme I n'est pas un multiple de l'identité, ses valeurs propres sont distinctes, donc i fixe deux points distincts a et b . Comme $i(i(p)) = p$, $[a, b, p, i(p)] = [a, b, i(p), p]$, donc $[a, b, p, i(p)]^2 = 1$.

1. Ou bien $[u, v, p, i(p)] = 1$, i.e. $i(p) = p$. Alors i est l'identité, contradiction.

2. Ou bien $[a, b, p, i(p)] = -1$, ce qui détermine i uniquement. $\square$

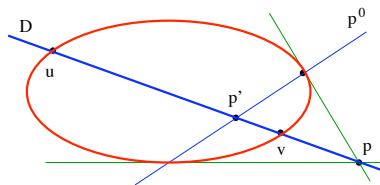
Cette preuve suggère la définition suivante.

Définition 6.8.3. On dit que 4 points a, b, c et d d'une droite projective forment une division harmonique si $[a, b, c, d] = -1$. Dans ce cas, on dit aussi que c et d sont conjugués harmoniques par rapport à la paire $\{a, b\}$.

REMARQUES :

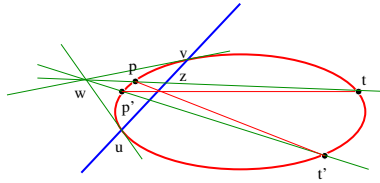
1. Si (a, b, c, d) forment une division harmonique d'une droite projective, il en est de même de (a, b, d, c) , (b, a, c, d) et (c, d, a, b) .
2. 4 points (a, b, c, d) d'une droite projective forment une division harmonique si et seulement si d est le polaire de c par rapport à la quadrique $Q = \{a, b\}$.
3. Dans la projectivisée d'une droite affine, le conjugué harmonique du point à l'infini par rapport à la paire $\{a, b\}$ est le milieu de $\{a, b\}$.

EXEMPLE : Soit C une conique non dégénérée du plan. Soit D une droite qui coupe C en deux points distincts u et v . Pour tout $p \in D$, le conjugué harmonique p' de p par rapport à $\{u, v\}$ le long de D est $D \cap p^0$.



EXERCICE : Soit C une conique non dégénérée du plan. Soit u et v deux points distincts de C , soit w le point polaire de la droite uv .

1. Pour tout $p \in C$, $t = pw \cap C$ est conjugué harmonique de p par rapport à $\{u, v\}$ le long de C .
2. Soit $p, p' \in C$, t, t' leurs conjugués harmoniques par rapport à $\{u, v\}$ le long de C . Alors les droites tp' et $t'p$ se coupent en un point de la droite uv .



Solution. Soit $z = uv \cap wp$, $t = wp \cap C$. Alors (w, p, z, t) est une division harmonique de la droite wp . Par conséquent, (vw, vp, vz, vt) est une division harmonique du faisceau des droites passant par v . Ces droites coupent donc la conique C en une division harmonique (v, p, u, t) . Par conséquent, $t = i(p)$ où i est l'involution homographique qui fixe u et v . Comme toute homographie de C , i se prolonge en une bijection projective du plan qui préserve C . Celle-ci fixe chaque point de la droite uv donc $pt' \cap uv = i(pt' \cap uv) = tp' \cap uv$. $\square$

Chapter 7

Topologie de l'espace projectif

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on souhaite raisonner par continuité, comme le faisait déjà Euclide. Même lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la topologie de l'espace projectif est utile. Comme il s'agit d'espaces quotients, la notion de topologie abstraite, en l'absence de toute métrique, est commode.

7.1 Rappels de topologie

Définition 7.1.1. Une topologie sur un ensemble X , c'est la donnée d'une collection $\mathcal{O}$ de parties de X appelées ouverts, qui est stable par réunion quelconque et intersection finie. On appelle fermé une partie dont le complémentaire est ouvert. Une application $f : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (X', \mathcal{O}')$ entre espaces topologiques est continue si l'image réciproque de tout ouvert est ouverte.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle qu'une partie $Y \subset X$ est ouverte si pour tout $x \in Y$, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(x, r) \subset Y$. On obtient ainsi une topologie sur X . La notion de continuité généralise bien celle du cas métrique.
2. Soit $X = \{0, 1\}$ l'ensemble à 2 éléments. On décide que le seul ouvert de X est X (topologie grossière). C'est bien une topologie sur X .

La propriété suivante nous sera utile

Proposition 7.1.2. Soit X un espace topologique et supposons que $X = \cup_i O_i$ où les O_i sont ouverts. Soient ψ une application de X dans Z telle que $\psi|_{O_i}$ est continue, alors ψ est continue.

Définition 7.1.3. Soit Y un espace topologique, X un ensemble, $f : X \rightarrow Y$ une application. La topologie induite sur X est celle dont les ouverts sont les parties $f^{-1}(Z)$ de X telles que Z est un ouvert de Y .

Définition 7.1.4. Soit X un espace topologique, Y un ensemble, $f : X \rightarrow Y$ une application. La topologie quotient sur Y est celle dont les ouverts sont les parties Z de Y telles que $f^{-1}(Z)$ est un ouvert de X .

7.2 Un premier point de vue sur la topologie de l'espace projectif

Nous allons tout d'abord donner à l'espace projectif (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une topologie quotient.

Définition 7.2.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, munie de sa topologie naturelle. La topologie de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est la topologie quotient par l'application $E \setminus \{0\}$ qui à un vecteur u associe la droite passant par u .

Proposition 7.2.2. Une carte affine A est un ouvert de $\mathcal{A}$. De plus, la paramétrisation de cette carte affine par un hyperplan affine est un homéomorphisme.

7.3 Projecteurs

Il est plus facile de comprendre la topologie de l'espace projectif à l'aide des projecteurs orthogonaux. Soit g une métrique euclidienne ou hermitienne sur E . Nous rappelons qu'un projecteur orthogonal de E sur une droite est la donnée d'un endomorphisme p de E tel que

1. $p \circ p = p$,
2. $\text{trace}(p) = 1$,
3. $\ker(p)^\perp = (p(E))^\perp$ ce qui équivaut à $p = p^*$.

Il est clair que $\mathbb{P}(E)$ est en bijection avec l'espace $\mathcal{P}$ des projecteurs orthogonaux sur les droites. Remarquons

Proposition 7.3.1. L'ensemble $\mathcal{P}$ est un sous-ensemble compact de $\text{End}(E)$

DÉMONSTRATION : En effet, $\mathcal{P}$ est définie par des équations et est donc fermé. Par ailleurs

$$a \rightarrow \|a\| := \text{trace}(aa^*)$$

est une norme sur $\text{End}(E)$ et $\mathcal{P}$ est inclus dans la boule de rayon 1 pour cette norme. $\square$

Nous allons montrer

Proposition 7.3.2. L'application qui à une droite associe la projection orthogonale est un homéomorphisme. En particulier, l'espace projectif est compact.

DÉMONSTRATION : Pour tout u de E , l'application de $\mathcal{P}$ dans E donnée par

$$E_u := p \mapsto p(u),$$

est continue, car linéaire.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit

$$\mathcal{P}_i = \{p \mid p(e_i) \neq 0\},$$

d'après ce que nous venons de voir, d'une part $\mathcal{P}_i$ est ouvert et d'autre part l'application

$$\mathcal{P}_i \rightarrow \mathbb{P}(E),$$

donnée par $p \mapsto p(E) = \pi \circ E_{e_i}(p)$ est continue. D'après la proposition 7.1.2, l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{E}$ qui à p associe son image est donc continue.

Maintenant, si f est une bijection continue d'un compact vers un espace Z séparé alors f est un homéomorphisme : en effet, l'image d'un fermé est fermé car compact, et donc l'image d'un ouvert est ouvert.

□

7.4 Droites projectives, applications

Proposition 7.4.1. *La droite projective sur $\mathbb{R}$ est homéomorphe au cercle. La droite projective sur $\mathbb{C}$ est homéomorphe à la sphère de dimension 2.*

Voici une information importante

Proposition 7.4.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension 3. L'application de*

$$\{(x, y) \in \mathbb{P}(E)^2 \mid x \neq y\}$$

dans $\mathbb{P}(E^)$ qui à deux points distincts associe la droite passant par ces deux points est continue. Plus généralement, si E est de dimension $n + 1$, l'application qui à n points en position générale associe l'hyperplan passant par ces n -points est continue.*

7.5 Deux lemmes utiles de topologie générale

Lemme 7.5.1. *Soit X et Y des espaces topologiques, soit A et B des fermés de X tels que $X = A \cup B$. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application telle que $f|_A$ et $f|_B$ sont continues. Alors f est continue.*

DÉMONSTRATION : Soit $F \subset Y$ un fermé. $f|_A^{-1}(F)$ est un fermé de A , donc un fermé de X . Alors $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap A) \cup (f^{-1}(F) \cap B) = f|_A^{-1}(F) \cup f|_B^{-1}(F)$ est fermé. □

D'autre part

Lemme 7.5.2. *Soit X un espace métrique compact. Soit U_i , $i \in I$ des ouverts qui recouvrent X . Alors il existe un rayon $r > 0$ (appelé nombre de Lebesgue du recouvrement) tel que toute boule de rayon r dans X soit entièrement contenue dans l'un des U_i .*

DÉMONSTRATION : Par compacité, on peut supposer l'ensemble I fini. Soit, pour $x \in X$, $d(x) = \max\{d(x, X \setminus U_i) \mid i \in I\}$. Alors d est continue, strictement positive, donc elle est bornée inférieurement par un $r > 0$. Si $x \in X$, comme $r \leq d(x)$, il existe $i \in I$ tel que $d(x, X \setminus U_i) \geq r$, ce qui signifie que $B(x, r) \subset U_i$. □

Part II

Géométrie hyperbolique

Chapter 8

Droites projectives réelle et complexe

8.1 La droite projective réelle

La structure d'ordre sur $\mathbb{R}$ donne naissance à une structure particulière sur la droite projective réelle.

Rappelons que deux repères d'un plan vectoriel définissent la *même orientation* si la matrice de changement de repère a un déterminant positif, définir la même orientation est une relation d'équivalence. Une *orientation* sur un plan vectoriel réel est la donnée d'une classe d'équivalence pour la relation précédente. Dans un plan orienté, un repère *positivement orienté* est un repère qui appartient à la classe d'équivalence définie par l'orientation. Un plan vectoriel possède deux orientations.

L'orientation d'un plan vectoriel donne naissance à un *ordre cyclique* sur la droite projective associée. Nous dirons que trois points (a, b, c) sont *positivement ordonnés* si la base correspondante est positivement orientée.

Une homographie *préserve l'orientation* si elle envoie trois points positivement ordonnés sur trois points positivement ordonnés. De manière équivalente, le déterminant de l'application linéaire sous-jacente est positif.

8.1.1 Classification des homographies réelles

Une homographie différente de l'identité fixe au plus deux points.

Définition 8.1.1. Soit A une homographie de la droite projective réelle

1. Si A ne fixe aucun point, alors A est dite elliptique.
2. Si A fixe exactement un point de la droite projective réelle, alors A est dite parabolique.
3. Si A fixe exactement deux points et préserve l'orientation alors A est dite hyperbolique.

Nous pouvons affiner la description de ces diverses isométries. Cette classification s'exprime en fonction du déterminant et de la trace. Si une homographie A est représentée par une matrice B de déterminant positif, nous poserons $\text{tr}(A) = |\text{tr}(B / \sqrt{\det(B)})|$.

Théorème 12. [CLASSIFICATION DES HOMOGRAPHIES RÉELLES] *Nous avons la classification suivante des homographies préservant l'orientation.*

1. Si $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) < 2$ alors A est elliptique.
2. Si $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) = 2$, alors A est parabolique.
3. Si $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) > 2$, alors A est hyperbolique.

Remarquons que suivant les cas l'homographie A est conjuguée successivement à une homographie de représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.2 Droite projective complexe et cercles projectifs

Soit V un plan complexe. C'est aussi un espace vectoriel réel de dimension 4, muni d'une application linéaire J de carré -1 . Soit P un plan vectoriel dans V . Nous avons alors deux cas

- $P = JP$ et dans ce cas P est une droite complexe
- $P + JP = V$ et on dit que P est un plan totalement réel.

Un plan vectoriel totalement réel P définit un sous-ensemble C_P de la droite projective complexe $\mathbb{P}(V)$ que nous appellerons *cercle projectif*:

$$C_P = \{D \in \mathbb{P}(V) \mid \dim_{\mathbb{R}}(P \cap D) = 1\}.$$

On remarque que ce cercle C_P est en bijection avec la droite réelle $\mathbb{P}(P)$. La bijection étant donnée par $D \mapsto D \cap P$.

REMARQUES :

Nous allons identifier ces cercles projectifs avec des cercles usuels dans une carte affine. Nous commençons par une première caractérisation.

Proposition 8.2.1. *Soit a une droite complexe et O_a la carte affine correspondante. Si P est un plan totalement réel rencontrant a , alors $C_P \cap O_a$ est une droite réelle affine. Réciproquement toute droite affine de O_a est de cette forme.*

DÉMONSTRATION : En effet tout plan totalement réel P de V passant par a est de la forme $P = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ avec e_1 appartenant à a . On considère ensuite les coordonnées homogènes associées à (e_1, e_2) et on remarque qu'une droite complexe de coordonnées homogènes $[a : b]$ rencontre P si et seulement si a/b est réel ou infini.

Proposition 8.2.2. *Par trois points distincts (a, b, c) passe exactement un cercle projectif. Ce cercle projectif C est l'ensemble*

$$C = \{z \mid \Im[a, b, c, z] = 0\}.$$

Un cercle projectif dans une carte affine quelconque est un cercle ou une droite.

DÉMONSTRATION : On envoie a à l'infini. La première partie du résultat se déduit du fait qu'un cercle projectif passant par a devient une droite affine et qu'il existe une seule droite affine passant par deux points. Si on envoie (a, b, c) sur $(\infty, 0, 1)$, la droite affine correspondante est l'axe réel ce qui entraîne la deuxième partie du résultat. Un calcul classique nous dit que dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$0 = \Im \left(\frac{(a-c)(b-z)}{(a-z)(b-c)} \right) = \Im[a, b, c, z],$$

définit un cercle ou une droite réelle.

8.2.1 Cercles orthogonaux

On dira que deux cercles C_1 et C_2 se coupant en deux points distincts a et b sont *orthogonaux* si pour tout x de C_1 et y de C_2 , $\Re([a, b, x, y]) = 0$.

Proposition 8.2.3. *Nous avons les propriétés suivantes*

1. Deux cercles sont orthogonaux s'il existe une carte affine dans lesquels ils donnent naissance à des droites orthogonales.
2. Deux cercles C_1 et C_2 s'intersectant en a et b sont orthogonaux s'il existe des points x de C_1 et y de C_2 distincts de a et b tels que $\Re([a, b, x, y]) = 0$. En particulier

$$C_2 = \{y \in \mathbb{P}(V) \mid \Re([a, b, x, y]) = 0\}.$$

3. Si C_1 et C_2 sont deux cercles. Si C_1 est une droite dans une carte affine tel que $\infty \notin C_2$, alors C_2 est orthogonal à C_1 si et seulement si dans cette carte son centre est sur C_1 .
4. Deux cercles C_1 et C_2 d'intersection non vide et coupant orthogonalement un troisième cercle C en a_1, b_1 et a_2, b_2 respectivement sont orthogonaux si $[a_1, b_1, a_2, b_2] = -1$.

DÉMONSTRATION : Pour la première propriété si $C_1 \cap C_2 = \{a, b\}$, on choisit une carte affine envoyant les b à l'infini et a sur 0. Les deux cercles deviennent des droites réelles de $\mathbb{C}$ passant par l'origine et le résultat suit.

Pour la deuxième propriété on utilise des coordonnées affines pour lesquelles C_1 est l'axe réel. On note a et b les intersections de C_2 avec l'axe réel. On suppose que $a = -b$ et soit ic et $i.d$ les intersections de C_2 avec l'axe imaginaire.

Comme C_2 est orthogonal à l'axe réel, on a en posant

$$0 = \Re[a, -a, ic, \infty] = \Re \left(\frac{(a - ic)}{(-a - ic)} \right) = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + c^2}.$$

Nous obtenons donc que $c = \pm a$ et donc que le centre de C_2 est 0.

Pour la dernière propriété on suppose que C_1 et C_2 se coupent en 0 dans une carte affine. Alors C est centré en 0 d'après la propriété précédente. On suppose de plus que C_1 est l'axe réel qui coupe C en R et $-R$. De même, C_2 coupe C en Ru avec $|u| = 1$. Ces cercles se coupent orthogonalement si $u = \pm i$.

$$[u.R, -uR, R, -R] = \frac{(u-1)^2}{(u+1)^2}.$$

Or

$$\frac{(u-1)^2}{(u+1)^2} = -1$$

si et seulement si $u^2 = 1$, c'est-à-dire $u = \pm i$.

8.2.2 Angle

On rappelle également que deux vecteurs d'une droite affine complexe ont un angle, de même que deux droites réelles. Une orientation du plan P donne naissance à une orientation du cercle C_P puisque ce dernier est identifié à la droite projective de P . On parle alors de *cercle orienté*.

Proposition 8.2.4. *Soit C_1 et C_2 deux cercles orientés se coupant en deux points distincts a et b . Soit x et y des points de C_1 et C_2 distincts de a et b , tels que (a, x, b) est positivement ordonné, de même que (a, y, b) . L'argument du birapport $[a, b, y, x]$ est indépendant du choix de x et y . Cet argument s'appelle l'angle des deux cercles.*

Cet angle est également l'angle d'intersection des deux cercles dans une carte affine quelconque. L'angle est préservé par les transformations projectives.

On remarque que deux cercles sont orthogonaux si leur angle est $\pi/2$.

DÉMONSTRATION : On envoie les deux points d'intersection sur 0 et ∞ . La première partie de la proposition est donc vérifiée. Par construction, l'angle est alors l'angle entre les droites réelles affines correspondantes.

En ce qui concerne la deuxième partie nous devons utiliser la propriété suivante des homographies : soit H une homographie, soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{C}$, alors l'angle entre u et v est égal à l'angle entre $D_x H(u)$ et $D_x H(v)$, où $D_x H$ est la différentielle de H en un point x quelconque. Ceci provient de ce que DH est une application linéaire complexe.

Deux cercles s'envoient par une homographie sur deux droites affines. D'après la remarque que nous venons de faire l'angle entre ces deux cercles est égal à l'angle entre ces deux droites.

Voici d'autres moyens de calculer de l'angle de deux cercles. Tout d'abord nous avons la proposition

Proposition 8.2.5. *Soit C_1 et C_2 deux cercles se coupant en deux points. On se donne un troisième cercle D qui coupe C_1 et C_2 orthogonalement en (a_1, b_1) et (a_2, b_2) . L'angle β entre C_1 et C_2 se calcule en fonction du birapport des quatre points $[a_1, b_1, a_2, b_2]$ par la formule*

$$[a_1, a_2, b_2, b_1] = \frac{\cos(\beta) + 1}{2} \quad (8.1)$$

DÉMONSTRATION : En effet, nous choisissons une carte affine où le cercle C_1 est l'axe réelle et C_2 est une droite réelle se coupant à l'origine. Le cercle D est alors un cercle centré sur l'origine que l'on peut choisir de rayon 1. Alors $(a_1, b_1) = (1, -1)$ et $(a_2, b_2) = (\cos(\beta) + i \sin(\beta), -\cos(\beta) - i \sin(\beta))$. La proposition suit alors d'un calcul explicite.

Voici enfin deux autres méthodes pour calculer l'angle entre deux cercles projectifs.

EXERCICES :

1. Soit a un point de $\mathbb{P}(V)$. Reliez l'angle de deux cercles C_{P_1} et C_{P_2} passant par a à l'angle que font les droites réelles $P_1 \cap a$ et $P_2 \cap a$ dans a .
2. Montrez qu'à tout cercle projectif C_P est associé une involution σ de $\mathbb{P}(V)$ telle que

$$\forall D_1, D_2, D_3, \in C_P, [D_1, D_2, D_3, D] = \overline{[D_1, D_2, D_3, \sigma(D)]}.$$

Montrez que la composée de deux telles involutions est une homographie et calculer l'angle en fonction de la trace de cette homographie.

Chapter 9

Le plan hyperbolique

9.1 Présentation axiomatique

La géométrie complète du plan hyperbolique peut-être décrite par quelques propriétés relatives à ses *géodésiques* – qui jouent le rôle des droites des géométries affines et projectives – ainsi qu’à son bord à l’infini.

Nous allons donc définir le plan hyperbolique à l’aide des ses propriétés. Ceci nous permettra d’une part de comprendre quelles sont les propriétés vraiment importantes du plan hyperbolique, d’autre part de comprendre qu’il est construit de manière unique.

Par la suite nous donnerons deux descriptions du plan hyperbolique, nettement plus concrètes et pratiques.

Si B est une droite projective réelle, nous pouvons définir une notion d’entrelacement entre deux paires (a, b) et (c, d) de points de B . On dira que (a, b) et (c, d) sont *entrelacées* si et seulement si $[a, b, c, d] < 0$. On remarque qu’être entrelacées est une relation symétrique et que de plus cette notion ne dépend que des ensembles $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ et non des paires.

En fait cette notion repose sur une structure plus faible que celle donnée par le birapport : que si un ensemble B est muni d’un ordre cyclique on dit que les paires (a, b) et (c, d) sont *entrelacées* si soit (a, c, b, d) soit (a, d, b, c) sont positivement ordonnés. Si on remplace un ordre cyclique par son opposé, la notion d’entrelacement est identique.

Définition 9.1.1. [PLAN HYPERBOLIQUE] Soit B une droite projective réelle. Un ensemble A est un plan hyperbolique de bord à l’infini B , si l’ensemble $\bar{A} = A \sqcup B$ est muni d’une famille de sous-ensembles appelés géodésiques, telles que

1. il passe une unique géodésique par paire de points distincts de $\bar{A}$,
2. Toute géodésique intersecte le bord à l’infini en exactement deux points, appelés points à l’infini.
3. Deux géodésiques s’intersectent si et seulement si les points à l’infini sont entrelacés. Dans ce cas, elles ont un unique point d’intersection.
4. Soit x un point de A , notons ι_x l’involution de B échangeant les points à l’infini des géodésiques passant par x . Alors, ι_x préserve le birapport.

L’ensemble $\bar{A}$ est un plan hyperbolique complété. Nous noterons le plan hyperbolique complété par $\bar{\mathbb{H}^2}$, son bord à l’infini par $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, et le plan hyperbolique lui-même est $\mathbb{H}^2 = \bar{\mathbb{H}^2} \setminus \partial_\infty \mathbb{H}^2$.

Nous commencerons par une remarque,

9.1.1 Involutions préservant le birapport

Notre première proposition explique le lien entre involutions et quadruples de points sur la droite projective réelle

Proposition 9.1.2. *Soit j une involution sans point fixe de la droite projective réelle préservant le birapport. Soit a et b deux points distincts et distincts de leurs image, alors $(b, j(b))$ et $(a, j(a))$ sont entrelacées.*

Soit de plus (a, b, c, d) quatre points distincts positivement ordonnés, il existe alors une unique involution sans point fixe de la droite projective réelle préservant le birapport telle que $c = j(a)$, $d = j(b)$.

DÉMONSTRATION : en effet on peut supposer que $j(a) = \infty$, $a = 0$, $b = 1$. L'involution est donnée dans ces coordonnées par

$$x \rightarrow \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Comme $j(0) = \infty$, on a nécessairement $\delta = 0$, comme $j(\infty) = 0$ on a $\alpha = 0$. On peut supposer $\gamma = 1$. Comme j est une involution sans pas de points fixe $\beta < 0$, ainsi $j(b) = \beta$. Nous en déduisons que $(a, b, j(a), j(b))$ est ordonné.

Nous en déduisons également que l'involution est complètement déterminée une fois $(a, b, j(a), j(b))$ connu.

Pour la deuxième partie du lemme, nous pouvons supposer que $(a, b, c, d) = (0, 1, \infty, \beta)$ avec $\beta < 0$ et nous considérons l'involution $x \rightarrow \beta/x$.

Le lemme suivant nous explique qu'un plan hyperbolique est complètement déterminé par son bord à l'infini.

Lemme 9.1.3. *Soit A un plan à l'hyperbolique et B son bord à l'infini. Alors l'application $\iota : x \rightarrow \iota_x$ est une bijection de $A \setminus B$ avec les involutions sans point fixes de B préservant le birapport.*

Dans cette bijection, la géodésique passant par deux points a et b du bord à l'infini est identifiée à l'ensemble des involutions envoyant a sur b .

DÉMONSTRATION : Si x est un point du plan hyperbolique, alors x est l'intersection de la géodésique $(a, \iota_x(a))$ avec la géodésique $(b, \iota_x(b))$. L'application ι est donc une injection. On se donne maintenant une involution préservant le birapport j . On se donne deux points distincts a et b de B , tels que $b \neq j(a)$. Comme d'après la proposition précédente $(a, j(a))$ et $(b, j(b))$ sont entrelacés, les géodésiques passant par $(a, j(a))$ et $(b, j(b))$ s'intersectent en un point x . Si ι_x est l'involution associée à x , alors $j(a) = \iota_x(a)$ et $j(b) = \iota_x(b)$. D'après la proposition précédente, nous avons $j = \iota_x$.

Nous en déduisons immédiatement le résultat suivant:

Proposition 9.1.4. *Tout les plans hyperboliques sont géométriquement équivalents : toute bijection projective entre deux droites projectives réelles B_1 et B_2 donne naissance à une bijection entre des plans hyperboliques complétés de bord à l'infini B_1 et B_2 envoyant géodésiques sur géodésiques, bord à l'infini sur bord à l'infini et préservant le birapport des points à l'infini.*

DÉMONSTRATION : On se donne deux plans hyperboliques A_1 et A_2 de bord à l'infini B_1 et B_2 . On construit tout d'abord une application projective f entre B_1 et B_2 . L'application $j \rightarrow f \circ j \circ f^{-1}$ réalise alors une bijection entre les involutions sans point fixes préservant le birapport et donc une bijection de $A_1 \setminus B_1$ dans $A_2 \setminus B_2$.

D'après la remarque précédente, cette application envoie géodésique sur géodésique.

9.1.2 Isométries

Définition 9.1.5. Une isométrie entre deux plans hyperboliques est une bijection des plans hyperboliques complétés préservant bord à l'infini et géodésiques, ainsi que le birapport des points à l'infini.

REMARQUES :

- Nous venons de montrer dans la proposition 9.1.4 que deux plans hyperboliques sont toujours isométriques.
- Une isométrie fixant trois points du bord à l'infini est l'identité,
- Le groupe des isométries d'un plan hyperbolique de bord à l'infini $\mathbb{P}(P)$ s'identifie naturellement à $\text{PGL}(P)$

Nous pouvons alors classer les isométries préservant l'orientation en fonction de leurs points fixes

Définition 9.1.6. Soit A une isométrie du plan hyperbolique préservant l'orientation

1. Si A ne fixe aucun point à l'infini, alors A est dite elliptique.
2. Si A un seul point point à l'infini, A est dite parabolique.
3. si A fixe exactement deux points à l'infini, alors A est une translation hyperbolique

Nous pouvons affiner la description de ces diverses isométries, pour cela nous identifions A avec une matrice. Si une homographie A est représentée par une matrice B de déterminant positif, nous poserons $\text{tr}(A) = |\text{tr}(B/\sqrt{\det(B)})|$.

Théorème 13. [CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES] Toute isométrie du plan hyperbolique préservant l'orientation fixe au moins un point du plan hyperbolique complété. Elle est soit elliptique, parabolique ou hyperbolique.

De plus soit A une isométrie.

1. Si $\det(A) > 0$ et $\text{tr}(A) < 2$ alors A est elliptique. Elle fixe alors un unique point du plan hyperbolique complété qui se trouve dans le plan hyperbolique
2. Si $\det(A) > 0$ et $\text{tr}(A) > 2$, alors A est une translation hyperbolique. Elle fixe alors globalement une géodésique et aucun point du plan hyperbolique.
3. Si $\det(A) > 0$ et $\text{tr}(A) = 2$, alors A est une transformation parabolique. Elle fixe alors un unique point du plan hyperbolique complété qui se trouve dans le plan à l'infini.

Remarquons que suivant les cas, l'homographie A est conjugué successivement à une homographie de représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION : Dire qu'une isométrie A fixe un point x de l'espace hyperbolique signifie que l'isométrie A commute avec i_x . Par ailleurs nous avons vu que les involutions préservant le birapport et l'orientation sont conjuguées à la matrice

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous vérifions que dans le premier cas A commute avec la matrice J . Nous en déduisons que toute isométrie préservant l'orientation de l'espace hyperbolique a un point fixe dans le plan hyperbolique complété.

De plus si A a un point fixe dans le plan hyperbolique, alors A est elliptique. Supposons en effet que ce point fixe soit représenté par J et A par une matrice de déterminant 1. On a alors $A \circ J = \lambda J \circ A$ avec $\lambda = \pm 1$. Le cas $A \circ J = -J \circ A$ est exclus car il entraîne $\det(A) < 0$. Donc A et J commutent et alors A est une rotation.

Il nous reste à montrer qu'une isométrie elliptique n'a qu'un point fixe. En effet si elle a deux points fixes distincts, elle fixe la géodésique passant par ces deux points et donc deux points à l'infini.

9.1.3 Géodésiques orthogonales

Définition 9.1.7. Nous dirons que deux géodésiques (a, b) et (c, d) sont orthogonales si le birapport de (a, b, c, d) est -1 .

Proposition 9.1.8. Soit a et b deux points à l'infini. Soit (a, b) la géodésique correspondantes et $x \in (a, b)$, Alors il existe une unique géodésique orthogonale à (a, b) passant par x .

De même, si y est un point du bord à l'infini différent de a et b , il existe une unique géodésique orthogonale à (a, b) passant par y .

DÉMONSTRATION : Si x est un point quelconque de (a, b) et si i est l'involution déterminée par x . La géodésique (y, Y) passe par x est orthogonale si et seulement si $Y = i(y)$ et

$$[a, b, y, i(y)] = -1. \quad (9.1)$$

Nous choisissons sur le bord à l'infini des coordonnées homogènes telles que $a = 0$ et $b = \infty$, l'involution est donnée par

$$i : z \rightarrow \frac{\alpha}{z},$$

avec $\alpha < 0$ puisque i préserve l'orientation. L'équation précédente devient alors

$$\alpha = -y^2. \quad (9.2)$$

Pour la première partie de la proposition, il existe exactement deux points $y_1 = \sqrt{-\alpha}$ et $y_2 = -\sqrt{-\alpha}$ solutions de l'équation (9.2) vu comme équation en y à α fixé. De plus $y_1 = i(y_2)$. La géodésique (y_1, y_2) est alors l'unique géodésique orthogonale à (a, b) passant par x .

Pour la deuxième partie de la proposition, La formule (9.2) devient alors une équation en α à y fixé qui a une unique solution:

$$\alpha = -y^2.$$

L'involution i détermine alors l'unique point x tel que (x, y) est orthogonal à (a, b)

Corollaire 9.1.9. *Soit (a, b) deux points de plan hyperbolique et (A, B) deux points à l'infini. Il existe alors une unique isométrie préservant l'orientation qui envoie (a, A) sur (b, B) .*

DÉMONSTRATION : On considère la géodésique $\gamma_A = (A, A_3)$ passant par a et A de même que la géodésique orthogonale $D_A = (A_1, A_2)$ de telle sorte que (A_1, A, A_2) soit positivement ordonnés. On obtient ainsi quatre points (A_1, A_2, A, A_3) dont le birapport est -1. Le résultat provient de ce qu'il existe exactement une homographie envoyant quatre points de birapport -1 sur quatre autres points de même birapport.

9.1.4 Symétries axiales

Définition 9.1.10. *La symétrie géodésique d'axe (a, b) est l'isométrie σ du plan hyperbolique caractérisée par $\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = b$ et $[a, b, c, \sigma(c)] = -1$.*

Proposition 9.1.11. *La symétrie d'axe (a, b) est l'unique isométrie différente de l'identité préservant tous les points de (a, b) . C'est une involution renversant l'orientation et ces points fixes sont exactement les points de la géodésique (a, b) .*

Toutes les involutions renversant l'orientation sont des symétries.

EXERCICES :

1. Soit (a, b) une géodésique et x un point hyperbolique. Soit σ la symétrie d'axe (a, b) , montrez que la géodésique passant par x et $\sigma(x)$ est l'unique géodésique orthogonale (a, b) passant par x .
2. Montrez que la symétrie axiale d'axe imaginaire pure dans le demi plan de Poincaré est l'application $z \rightarrow -\bar{z}$.
3. Montrez que toute isométrie du plan renversant l'orientation du plan hyperbolique s'écrit

$$z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

9.1.5 Distance hyperbolique et paramétrisation

Nous allons définir la distance hyperbolique entre deux plans du plan hyperbolique. Cette distance va jouer un rôle fondamental par la suite.

Commençons par une définition. Nous avons vu qu'une géodésique est définie par un couple de points deux points $\{a, b\}$ du bord à l'infini. Le choix de la paire (a, b) – plutôt que la paire (b, a) – définit une *orientation* de la géodésique.

Proposition 9.1.12. Soit $\gamma = (u, v)$ une géodésique orientée et x un point de γ . Pour tout point y de (a, b) , soit Y un point du bord à l'infini tel que la géodésique passant par y et Y est orthogonale à (a, b) .

Alors la quantité $\log ([v, u, X, Y])$ ne dépend pas du choix de X et Y . De plus, l'application de γ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$y \rightarrow \log [v, u, X, Y]$$

une bijection.

Définition 9.1.13. L'inverse de la bijection construite dans la proposition précédente est une paramétrisation à vitesse 1 de la géodésique. Un arc géodésique est l'image par cette paramétrisation d'un intervalle.

REMARQUES :

1. Renverser l'orientation de la géodésique revient à renverser le signe de la paramétrisation.
2. Deux paramétrisations associées à des choix différents du point x diffèrent d'une constante.

DÉMONSTRATION : Cette proposition suit immédiatement de la deuxième partie de la proposition 9.1.8.

Définition 9.1.14. Soit x et y deux points distincts du plan hyperbolique. Soit γ la géodésique passant par x et y d'extrémités u et v . Soit (a, A) – respectivement (b, B) – une géodésique orthogonale à γ passant par x – respectivement y . La quantité

$$d(x, y) = \left| \log ([v, u, a, b]) \right|.$$

ne dépend pas des choix fait et s'appelle distance hyperbolique entre x et y .

REMARQUES :

1. On remarque que la distance est invariante par les isométries.
2. Si on choisit une orientation et u, v, a, b de façon à ce que (u, v, a, b) soit orienté on a

$$d(x, y) = \log ([v, u, a, b]).$$

3. Nous verrons plus tard que d est bien une distance et vérifie l'inégalité triangulaire.

EXERCICE : Définir la distance entre deux points à partir des involutions correspondantes.

9.1.6 Angle entre deux géodésiques

Comme pour les droites nous avons la distinction entre l'angle orienté et l'angle non orienté.

Définition 9.1.15. *Supposons que le bord à l'infini est orienté. Soit (a, b) et (c, d) deux géodésiques ayant une intersection en x . On dit qu'elle font un angle orienté β si le birapport de (a, b, c, d) est*

$$[a, c, d, b] = \frac{\cos(\beta) + 1}{2},$$

et où l'angle β est choisi dans $[0, \pi]$, si (a, c, b, d) est orienté, et où il est choisi dans $[-\pi, 0]$ si (a, d, b, c) est orienté.

On remarque que l'angle orienté change de signe lorsque l'on change l'orientation du bord à l'infini. On définit l'angle non orienté comme la valeur absolue de cet angle.

Par ailleurs, si on intervertit c et d , l'angle est changé en lui additionnant π modulo 2π .

EXERCICE : Définir l'angle entre deux géodésiques à partir des symétries correspondantes.

9.2 Construction du plan hyperbolique : différent modèles

Pour le moment, nous avons vu que tous les plans hyperboliques sont géométriquement identiques. Il nous reste cependant à construire au moins un plan hyperbolique, à savoir construire un ensemble A muni d'un bord à l'infini et de géodésiques.

9.2.1 Le modèle des involutions

Sous-jacent au texte précédent, nous avons un premier modèle du plan hyperbolique: nous prenons en effet pour bord à l'infini B , une droite projective réelle et pour $A \setminus B$ l'ensemble des involutions préservant le birapport et l'orientation. Si a et b sont deux points de B , la géodésique passant par a et b est $\{a, b\}$ union l'ensemble des involutions envoyant a sur b .

Il reste à vérifier que ce modèle vérifie les diverses propriétés du plan hyperbolique. Nous en avons déjà démontré certaines. Il nous reste à démontrer qu'il existe une unique géodésiques passant par deux points. Cela repose sur la proposition suivante que nous laissons en exercice.

Proposition 9.2.1. *Soit I et J deux involutions préservant l'orientation. Alors $I \circ J$ a exactement deux points fixes sur la droite projective qui sont échangés par I et J .*

Soit I une involution préservant le birapport et l'orientation, et échangeant a et b . Alors l'ensemble des involutions préservant le birapport et l'orientation et échangeant a et b est exactement l'ensemble des involutions J tel que $I \circ J$ fixe a et b .

Nous aurions pu adopter une stratégie détournée : nous allons proposer d'autres modèles du plan hyperbolique. Une fois que nous aurons vérifié que ces modèles conviennent – autrement dit que le plan hyperbolique existe bien – nous saurons alors que le plan hyperbolique s'identifie aux involutions et que les géodésiques sont construites comme nous venons de le dire.

9.2.2 Le modèle projectif complexe du plan hyperbolique

Nous allons utiliser notre chapitre sur droites projectives réelles et complexes.

Soit donc V un plan complexe et P un plan totalement réel. Nous considérons le cercle projectif C_P identifié à $\mathbb{P}(P)$. Nous choisissons une orientation sur la droite projective sur C_P , et posons

$$\overline{\mathbb{H}^2}(P) = \{z \in \mathbb{P}(V) \mid \Im([a, b, c, z]) \geq 0, \text{ où } (a, b, c) \text{ sont positivement ordonnés sur } C_P\}.$$

Nous identifions C_P au bord à l'infini de ce plan hyperbolique et posons

$$\mathbb{H}^2(P) = \overline{\mathbb{H}^2}(P) \setminus C_P.$$

Les géodésiques du modèle projectif sont les cercles orthogonaux à C_P .

Vérification des axiomes

Les deux propositions qui suivent nous permettent de montrer que nous avons bien un modèle du plan hyperbolique

Proposition 9.2.2. *Soit a et b deux points distincts de $\mathbb{H}^2(P)$. Il existe alors un unique cercle orthogonal à C_P passant par a et b .*

De plus deux cercles orthogonaux à C_P ont au plus une intersection dans $\mathbb{H}^2(P)$. Ils ont une intersection si et seulement si $[a, b, c, d] > 0$ où $\{a, b\}$ – respectivement $\{c, d\}$ – est l'intersection du premier – respectivement deuxième cercle avec C_P .

DÉMONSTRATION : On utilise une carte affine dans laquelle le cercle projectif C_P est l'axe réel. Si a et b sont tous les deux réels le résultat est évident. Sinon supposons $a \neq \bar{a}$, on considère la cercle C_1 passant par a, b et $\bar{a}$. Comme $\Im[a, b, \bar{a}, \bar{b}] = 0$, les quatre points $a, b, \bar{a}$ et $\bar{b}$ sont sur le même cercle qui est donc invariant par l'application $z \rightarrow \bar{z}$. Ce cercle est donc soit une droite orthogonale à l'axe réelle, soit un cercle centré sur l'axe réel qui est donc orthogonal à cet axe. L'unicité suit de la construction.

Pour la deuxième partie, on ramène au cas où C_P est l'axe réel et le premier cercle l'axe imaginaire. Le deuxième cercle centré sur l'axe réel a au plus un point d'intersection avec l'axe imaginaire dans $\mathbb{H}^2$. Il en a un si et seulement si ses intersections avec l'axe réel sont de signe opposés ce qui se traduit par la condition sur le birapport.

Proposition 9.2.3. *Soit z_0 un point de $\mathbb{H}^2(P)$. L'involution de C_P dans lui-même associée à z_0 est la restriction d'un homographie préservant C_P .*

DÉMONSTRATION : Considérons deux géodésiques orthogonales (a, c) et (b, d) passant par z_0 . Nous choisissons des coordonnées homogènes telles que $(a, b, c, d) = (0, 1, \infty, -1)$. Considérons alors l'involution

$$I : z \mapsto -\frac{1}{z}.$$

Cette involution I préserve le birapport. Elle préserve C_P puisqu'elle envoie les trois points (a, b, c) de C_P sur les trois points (c, d, b) de C_P et qu'un cercle projectif est déterminé par trois points. Comme I préserve l'orientation, I préserve $\mathbb{H}^2(P)$

Elle préserve globalement les géodésiques (a, c) et (b, d) , et donc leur unique intersection z_0 dans $\mathbb{H}^2$. Nous en déduisons finalement que cette involution préservant z_0 ainsi que les géodésiques passant par z_0 , échange leurs extrémités.

Angle et distance dans le modèle projectif

La distance hyperbolique se calcule alors à l'aide de la proposition

Proposition 9.2.4. *Soit a et b deux points de $\mathbb{H}^2(P)$. Soit c et d les intersections de la géodésique passant par a et b avec le bord à l'infini. On suppose que (u, a, b, v) est orienté. Alors*

$$d(a, b) = \log([v, u, a, b])$$

DÉMONSTRATION : On se ramène au cas où $u = 0, v = \infty, a = i, b = i.x$. Comme le birapport de (u, v, a, b) est réel, x est réel.

On considère alors les points $\hat{a} = 1$ et $\hat{b} = x$. La géodésique passant par a et $\hat{a}$ intersecte $\mathbb{C}_P$ en $\alpha = -1$: en effet le cercle projectif passant par $a, \hat{a}$ et α est orthogonal à $\mathbb{C}_P$, puisque le $\Re([\hat{a}, \alpha, a, v]) = 0$. De même cette géodésique est orthogonale à la géodésique passant par a et b puisque $[u, v, \alpha, \hat{a}] = -1$.

Alors,

$$d(a, b) = \log([v, u, \hat{a}, \hat{b}]) = \log([v, u, a, b]),$$

ou la première égalité suit de la définition et la deuxième d'un calcul. Enfin nous avons

Proposition 9.2.5. *L'angle entre deux géodésiques (a, b) et (c, d) est l'angle entre les cercles projectifs orientés correspondants.*

Les isométries dans le modèle projectif

Nous avons

Proposition 9.2.6. *Les isométries préservant l'orientation du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2(P)$ sont les homographies préservant $\mathbb{C}_P$ et son orientation.*

DÉMONSTRATION : Soit G_P le groupes des homographies préservant $\mathbb{C}_P$. Montrons tout d'abord les deux propriétés suivantes

1. G_P préserve $\mathbb{H}^2(P)$.
2. G_P agit par transformation projective sur $\mathbb{C}_P$ et la restriction est un isomorphisme de G_P sur $\text{PSL}(P)$.

Choisissons une carte dans laquelle $\mathbb{C}_P$ est l'axe réel. On considère une homographie préservant l'axe réel

$$H : z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}.$$

On considère l'homographie H'

$$z \rightarrow \overline{H(\bar{z})} = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}}.$$

Cette homographie H' coïncide avec H sur l'axe réel, elle coïncide donc avec H partout car une homographie est déterminée par l'image de trois points. Nous en déduisons que a, b, c, d sont tous réels. Ceci démontre en particulier la deuxième partie de l'assertion.

Un calcul direct donne que

$$\Im(H(z)) = \frac{\Im(z)}{(cz + d)^2} (ad - bc),$$

et la première partie de l'assertion suit.

Nous pouvons maintenant conclure la preuve de la proposition. Comme G_P agit par homographie préservant l'orientation sur C_P et préserve les cercles projectifs orthogonaux à C_P , elle agit par isométrie sur $\mathbb{H}^2(P)$.

Réciproquement, une isométrie ϕ de $\mathbb{H}^2(P)$ agit par homographie (réelle) préservant l'orientation de C_P . Sa restriction à C_P coïncide donc avec la restriction d'une homographie (complexe) ψ préservant C_P . Comme ψ est également une isométrie et qu'une isométrie est caractérisée par son action sur le bord à l'infini, ϕ et ψ sont égales.

9.2.3 Le modèle du demi-plan de Poincaré

Ce modèle est le plus facile à utiliser pour les calculs. Il est obtenu à partir du modèle projectif complexe en envoyant un point du bord à l'infini à l'infini. IL joue pour le plan hyperbolique le rôle des cartes affines.

Le plan hyperbolique s'identifie dans cette carte affine à

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}.$$

Le bord à l'infini est donné par l'axe réel

$$\partial_\infty \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Les géodésiques sont les cercles ou droites orthogonales à l'axe réel. La distance hyperbolique entre deux points $i.x$ et $i.y$ de l'axe réel est $|\log(x/y)|$.

On en déduit le résultat suivant

Proposition 9.2.7. *Dans le modèle du demi plan de Poincaré, si la géodésique passant par x et y a comme point à l'infini a et b , alors*

$$d(x, y) = |\log[a; b; x; y]|. \quad (9.3)$$

Isométries

Les isométries préservant l'orientation du plan hyperbolique sont les homographies

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d},$$

avec a, b, c, d , réels et $ad - bc > 0$. En effet ce sont les seules homographies préservant l'axe réel et son orientation.

EXERCICES :

1. Soit (a, b) une géodésique et x un point hyperbolique. Soit σ mla symétrie d'axe (a, b) , montrez que la géodésique passant par x et $\sigma(x)$ est l'unique géodésique orthogonale (a, b) passant par x .

2. Montrez que la symétrie axiale d'axe imaginaire pure dans le demi plan de Poincaré est l'application $z \rightarrow -\bar{z}$.
3. Montrez que toute isométrie du plan renversant l'orientation du plan hyperbolique s'écrit

$$z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

avec a, b, c, d , réels et $ad - bc < 0$

Longueur des courbes

Le modèle du demi plan permet d'introduire une notion importante.

Définition 9.2.8. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow x(t) + iy(t)$ une courbe continue et C^1 par morceaux à valeurs dans le demi plan de Poincaré. La longueur hyperbolique de la courbe c est

$$\ell(c) = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)} dt.$$

La propriété suivante résume les propriétés importantes de la longueur hyperbolique

Proposition 9.2.9. Soit γ une courbe définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{H}^2$.

1. Soit ϕ un difféomorphisme de l'intervalle $[c, d]$ sur l'intervalle $[a, b]$. Alors

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \phi).$$

2. Soit H une isométrie de $\mathbb{H}^2$ dans lui même, alors

$$\ell(\gamma) = \ell(H \circ \gamma).$$

3. Nous avons l'inégalité

$$\ell(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b)),$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si la courbe γ est une paramétrisation de la géodésique entre $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$

4. nous avons l'inégalité

$$d(a, b) \geq \left| \log \left(\frac{\Im(a)}{\Im(b)} \right) \right|.$$

Examinons les conséquences de cette proposition. La deuxième propriété nous permet de définir la longueur d'une courbe dans tout plan hyperbolique. En effet si A est un plan hyperbolique, il existe une isométrie ψ de A vers $\mathbb{H}^2$ unique à composition à gauche par une homographie. Soit maintenant γ une courbe tracée dans A . Nous pouvons alors poser sans ambiguïté

$$\ell(\gamma) = \ell(\psi(\gamma)),$$

et d'après la deuxième propriété cette longueur ne dépend pas du choix de ψ .

La troisième propriété nous dit que – comme leur nom l’indique – les géodésiques sont les courbes de plus petite longueur. Elle nous permet de montrer l’inégalité triangulaire pour la distance hyperbolique:

$$d(x, y) + d(y, w) \geq d(x, w).$$

En effet la réunion de l’arc géodésique de x à y puis de y à w est une courbe C^1 par morceaux dont la longueur est la somme des longueurs des arcs géodésiques, à savoir $d(x, y) + d(y, w)$. L’inégalité triangulaire est alors une conséquence de l’inégalité de la troisième propriété.

DÉMONSTRATION : La première propriété est une conséquence de la formule de changement de variable

$$\begin{aligned} \ell(\gamma \circ \phi) &= \int_c^d \frac{\sqrt{x \circ \phi(t)^2 + y \circ \phi(t)^2}}{y \circ \phi(t)} dt \\ &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} |\dot{\phi}(t)| \frac{\sqrt{\dot{x} \circ \phi(t)^2 + \dot{y} \circ \phi(t)^2}}{y \circ \phi(t)} dt \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)} dt = \ell(\gamma). \end{aligned}$$

Pour la deuxième propriété, soit

$$H : z \rightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\lambda z + \delta}$$

une homographie, où $\alpha.\delta - \lambda.\beta = \pm 1$. Alors si u est un vecteur complexe

$$D_z H(u) = \frac{1}{(\lambda z + \delta)^2} u.$$

Nous pouvons par ailleurs écrire

$$\ell(\gamma) := \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{\Im(\gamma'(t))} dt.$$

Remarquons par ailleurs que

$$\Im(H(z)) = \frac{1}{|\lambda.z + \delta|^2} \Im(z).$$

Alors

$$\begin{aligned} \ell(H \circ \gamma) &= \int_a^b \frac{|H \circ \gamma(t)|}{\Im(H \circ \gamma'(t))} dt \\ &= \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{|\lambda \gamma(t) + \delta|^2 \Im\left(\frac{\alpha \gamma'(t) + \beta}{\lambda \gamma(t) + \delta}\right)} dt \\ &= \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{\Im(\gamma'(t))} dt = \ell(\gamma). \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue montre que si $I : z \rightarrow -\bar{z}$, alors $\ell(I \circ c) = \ell(c)$. Comme tout isométrie est soit une homographie, soit la composée de I et d'une homographie nous obtenons le résultat.

Démontrer la troisième inégalité. En composant avec une homographie, nous pouvons supposer que $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont sur l'axe imaginaire. Alors

$$\begin{aligned} \ell(c) &= \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{|\dot{y}(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \left| \int_a^b \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt \right| \\ &= \left| \log \frac{y(a)}{y(b)} \right| = d(\gamma(a), \gamma(b)). \end{aligned}$$

Le cas d'égalité implique que $\dot{x} = 0$ et $\dot{y}$ de signe constant, autrement dit γ est une paramétrisation de l'arc joignant $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$.

La quatrième inégalité suit de la première partie de la preuve de la troisième inégalité.

9.2.4 Le modèle du disque de Poincaré

On choisit une carte affine qui envoie le cercle projectif / bord à l'infini vers le cercle U de rayon 1, centré à l'origine de $\mathbb{C}$. Dans ce modèle le plan hyperbolique est l'intérieur du disque et les géodésiques sont soit les cercles orthogonaux au bord soit les droites passant par l'origine. La distance hyperbolique à l'origine se calcule aisément dans ce modèle

$$d(x, 0) = \log \left(\frac{1 + |x|}{1 - |x|} \right) \quad (9.4)$$

En effet

$$d(x, 0) = \log \left[-\frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|}, x, 0 \right] = \log \frac{(-\frac{x}{|x|} - x)(\frac{x}{|x|})}{(\frac{x}{|x|} - x)(-\frac{x}{|x|})} = \log \left(\frac{1 + |x|}{1 - |x|} \right)$$

Corollaire 9.2.10. *Les boules hyperboliques – c'est-à-dire pour la distance hyperbolique – du modèle de Poincaré sont des boules euclidiennes.*

Attention : la boule hyperbolique et la boule euclidienne avec laquelle elle coïncide n'ont souvent ni le même centre ni le même rayon. Si nous notons par $B_h(x, R)$ la boule hyperbolique de centre x et de rayon R . Le résultat s'écrit

$$\forall x \in U, \forall R > 0, \exists y \in U, \exists S > 0, B_h(x, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |y - z| < S\}.$$

DÉMONSTRATION : Les boules hyperboliques centrées en zéro sont des boules euclidiennes par le calcul de la distance à l'origine.

Par ailleurs, il existe toujours une isométrie ϕ préservant l'orientation envoyant un point x sur 0. Comme ϕ est une isométrie $\phi(B_h(x, R)) = B_h(0, R)$. En particulier

$$\phi^{-1}(B_h(0, R)) = B_h(x, R),$$

est une boule euclidienne car l'image d'une boule euclidienne par une homographie est une boule euclidienne : les homographies préservent les cercles projectifs.

9.2.5 Le modèle projectif de Klein

Considérons la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^3$

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Nous avons alors trois types de droites dans $\mathbb{R}^3$

1. les droites de type *espace* : celles pour lesquelles la restriction de Q est positive,
2. les droites de type *temps* : celles pour lesquelles la restriction de Q est négative,
3. les droites de type *lumière* : celles pour lesquelles la restriction de Q est nulle.

Soit alors C la conique d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Montrons tout d'abord la propriété suivante

Proposition 9.2.11. *Soit x_0 une droite de type temps. Il existe alors une carte affine dans laquelle $x_0 = 0$, et la conique C est le cercle de centre x_0 .*

DÉMONSTRATION : En effet, nous choisissons une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle e_3 est un vecteur de norme -1 de x_0 , (e_1, e_2) est une base orthonormée de $x_0^\perp$. Dans cette base, si z est de coordonnées (u, v, w) alors $Q(z) = u^2 + v^2 - w^2$. Dans la carte affine $w = 0$, x_0 est l'origine et C est un cercle centré sur l'origine.

Définition 9.2.12. *Le modèle projectif de Klein est le modèle pour lequel*

- *Le bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ est l'ensemble des droites de type lumière, c'est-à-dire la conique d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$,*
- *le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ est l'ensemble des droites de type temps,*
- *les géodésiques sont les intersections des droites projectives avec $\mathbb{H}^2$,*
- *le birapport sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ est donnée par la paramétrisation unicursale de la conique $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.*

Nous devons montrer que ce modèle vérifie les axiomes. Le seul point délicat à montrer est que l'inversion par rapport à un point x_0 préserve le birapport. Ceci découle de la proposition 9.2.11. En effet dans la carte affine pour laquelle x_0 est l'origine et $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ est un cercle centré sur l'origine. L'inversion est la restriction de l'application $z \mapsto -z$ qui est une transformation projective préservant $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ et en particulier préservant le birapport.

Une autre version du modèle projectif de Klein consiste à prendre ce modèle dans une carte affine:

- *Le bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ est le cercle de rayon 1 centré en l'origine*
- *le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ est l'intérieur du disque*
- *les géodésiques sont les intersections des droites affines avec $\mathbb{H}^2$,*
- *le birapport sur C est donné par la paramétrisation unicursale de C , c'est-à-dire que si quatre points x_i sont repérés par leur angle θ_i , leur birapport est*

$$\left[\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right); \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right); \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right); \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \right].$$

Chapter 10

Le plan hyperbolique comme espace métrique

Nous venons de voir que l'espace hyperbolique muni de sa distance hyperbolique est un espace métrique. Nous allons reconstituer sa géométrie à partir de distance. Nous allons d'abord reconstituer les géodésiques, l'angle de deux géodésiques, le bord à l'infini et enfin les isométries.

10.1 Reconstruction de la géométrie à partir de la métrique

10.1.1 Géodésiques

Les géodésiques se construisent à partir de la distance.

Proposition 10.1.1. *Soit a et b deux points du plan hyperbolique. Alors l'arc géodésique joignant a à b est*

$$\{x \mid d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\}.$$

10.1.2 Le bord à l'infini

Nous pouvons interpréter du point de vue métrique le fait que deux géodésiques passent par le même point à l'infini.

Introduisons une définition

Définition 10.1.2. *Deux arcs géodésiques (a, A) et (b, B) où a et b sont des points de $\mathbb{H}^2$ et A et B des points de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ paramétrés par $t \rightarrow a(t)$ et $t \rightarrow b(t)$ respectivement sont asymptotes si et seulement si*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \{d(a(t), b(t))\} < \infty.$$

Proposition 10.1.3. *Deux arcs (a, A) et (b, B) sont asymptotes si et seulement si $A = B$*

Nous pouvons alors reconstruire le bord à l'infini à partir de la métrique de la manière suivante : nous remarquons que la relation "être asymptote" est une relation d'équivalence et nous identifions le bord à l'infini avec l'ensemble des classes d'équivalence.

DÉMONSTRATION : Cela se fait par un calcul explicite dans le plan hyperbolique. On suppose tout d'abord que $A = B = \infty$, la première géodésique est alors paramétrée par $a : t \rightarrow a + ie^{t+\alpha}$ et la deuxième par $b : t \rightarrow b + ie^{t+\beta}$.

En considérant les courbes de niveaux y constante on remarque que $d(a + iy, b + iy) \leq |a - b|/y$.

Nous obtenons alors que

$$d(a(t), b(t)) \leq \alpha + \beta d(a + e^{it}, b + e^{it}) \leq \alpha + \beta + \frac{|a - b|}{e^t}.$$

Ainsi $a(t)$ et $b(t)$ sont asymptotes.

Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde et on suppose que $A = \infty \neq B$. En particulier

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Im(b(t)) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \Im(a(t)) = \infty.$$

Par ailleurs, on a toujours

$$d(u, v) \geq \left| \log \left(\frac{\Im(u)}{\Im(v)} \right) \right|.$$

En particulier

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(a(t), b(t)) = \infty.$$

10.1.3 Birapport

Le birapport se reconstruit lui aussi à l'aide de la métrique à partir de sa définition:

Nous nous donnons quatre points à l'infini (a, b, c, d) , nous considérons la géodésique (a, b) . Il existe un unique point x tel que l'arc géodésique (x, c) est orthogonal à (a, b) , de même il existe un unique point y tel que (y, d) est orthogonal à (a, b) .

Alors, d'après la définition de la métrique hyperbolique

$$|[a, c, d, b]| = e^{d(x, y)}.$$

Le signe du birapport dépend de l'entrelacement de (a, b) et (c, d) . Ceci nous permet de reconstruire de birapport entre quatre points à partir de la seule distance.

Voici une autre formule qui nous sera utile par la suite

Proposition 10.1.4. *Soit (a, b, c, d) quatre points à l'infini tels que (a, b) n'est pas entrelacé avec (c, d) et (a, c, d, b) est ordonné, il existe alors une unique géodésique orthogonale γ avec (a, b) et (c, d) . De plus*

$$[a, c, d, b] = \frac{1}{2} \cosh^2 \left(\frac{d(x, y)}{2} \right), \quad (10.1)$$

$$[a, b, c, d] = \tanh^2 (d(x, y)). \quad (10.2)$$

où x est l'intersection de γ avec (a, b) et y est l'intersection de γ avec (c, d) .

DÉMONSTRATION : On choisit un demi plan de Poincaré tel que (a, b) est l'axe vertical. Les géodésiques orthogonales sont alors les demi-cercles $C(x)$ de centre 0 passant par $x, -x$ avec

$x > 0$. La géodésique (c, d) est alors un demi-cercle passant donc par z, w avec $zw > 0$. Pour que les géodésiques $C(x)$ et (c, d) soit orthogonales, il faut que

$$-1 = [x, -x, z, w] = \frac{(x - z)(x + w)}{(x + z)(x - w)}.$$

Nous obtenons ainsi l'équation

$$x^2 + x(w - z) - 1 - wz,$$

qui a deux solutions de signes opposés et donc une seule solution positive. Ceci garantit l'existence d'une unique géodésique orthogonale à la fois à (a, b) et (c, d) .

Enfin, pour la dernière formule, on suppose que γ va de zéro à l'infini dans le modèle du demi-plan. Alors $(a, b) = (-X, X)$ et $(c, d) = (-Y, Y)$. Dans ces conditions

$$d(x, y) = \left| \log \left(\frac{X}{Y} \right) \right|$$

Par ailleurs,

$$[a, c, d, b] = \frac{(X + Y)^2}{4XY}.$$

10.1.4 Triangles

Nous allons montrer le lemme suivant

Proposition 10.1.5. [CLASSIFICATION DES TRIANGLES] *Soit p, q, r trois nombres réels strictement positifs tels que $p + q > r$, $p + r > q$ et $q + r > p$. Il existe alors trois points a, b et c dont les distances entre les sommets sont exactement p, q et r . Un tel triangle est unique à isométrie près.*

DÉMONSTRATION : Soit x et y deux points à distance p . Les hypothèses entraînent que la boule de rayon p autour de x et de rayon q autour de y s'intersectent. Les bords de ces boules - qui sont des cercles projectifs - s'intersectent en deux points qui sont échangés par la symétrie d'axe (x, y) . L'un quelconque de ces deux points forme le troisième sommet du triangle.

La construction montre que tous les triangles dont les côtés sont de longueur p, q et r sont isométriques.

10.2 Extension des isométries

Nous avons vu qu'une isométrie préserve la distance et les géodésiques.

Théorème 14. *Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{H}^2$. Soit H une application de K dans $\mathbb{H}^2$ préservant la distance. Alors H est la restriction d'une isométrie.*

Pour l'unicité, il est intéressant de rappeler qu'une isométrie préservant l'orientation et fixant deux points est l'identité.

DÉMONSTRATION : Soit a un point de K , en composant avec une isométrie on peut supposer

que $H(a) = a$. Si $K = \{a\}$ c'est fini.

On note maintenant par (a, A) la géodésique passant par a et le point à l'infini A de même que le K -arc $\widehat{(a, A)}$ qui l'intersection de cette géodésique avec K .

D'après la proposition 10.1.1, l'image de $\widehat{(a, A)}$ est un sous-ensemble d'un arc géodésique. En composant avec une homographie, nous pouvons nous ramener à la situation suivante: il existe un point A du bord à l'infini, tel que $\widehat{(a, A)}$ contient un point a_1 distinct de a et est fixé point par point par H .

Si $K = \widehat{(a, A)}$ c'est fini.

Soit donc un arc $\widehat{(a, B)}$ un autre arc non réduit à a et $b \in \widehat{(a, B)} \setminus \{a\}$. Par la proposition 10.1.5, nous savons que le triangle $(a, a_1, H(b)) = (H(a), H(a_1), H(b))$ est l'image de (a, a_1, b) par une isométrie de $\mathbb{H}^2$. En composant avec cette isométrie nous pouvons donc nous ramener au cas où H fixe (a, a_1, b) . Soit alors γ l'angle entre $\widehat{(a, A)}$ et $\widehat{(a, B)}$.

Montrons maintenant que H préserve tous les K -arcs géodésiques passant par a .

Soit donc η un tel K -arc. Nous savons que $H(\eta)$ est inclus dans un arc géodésique. Si β est l'angle orienté entre η et (a, A) et si $\hat{\beta}$ est l'angle orienté entre $H(\gamma)$ et (a, A) , la proposition 10.1.5 entraîne par unicité des triangles que

$$\cos(\beta) = \cos(\hat{\beta})$$

Si $\beta = \hat{\beta}$ alors H préserve η . Raisonnons par l'absurde et supposons que H ne préserve par η , alors $\hat{\beta} = 2\pi - \beta$.

De même, si α est l'angle entre γ et (a, a_1) et alors $\hat{\alpha}$ est l'angle entre $H(\gamma)$ et (a, a_1) alors

$$\cos(\alpha) = \cos(\hat{\alpha}).$$

Pour la même raison, $\hat{\alpha} = 2\pi - \alpha$. Supposons $\alpha > \beta$, alors – un petit dessin aide –

$$\alpha - \beta = \gamma [2\pi].$$

De même

$$\hat{\beta} - \hat{\alpha} = \gamma [2\pi].$$

Nous obtenons donc la contradiction car $\gamma \neq -\gamma [2\pi]$.

Nous venons de montrer qu'après composition avec une homographie H est l'identité.

10.3 Au voisinage d'un point

10.3.1 Les boules ouvertes

Rappelons que la boule ouverte de centre x de rayon R dans un espace métrique M est

$$B(x, R) := \{y \in M \mid d(y, x) < R\}.$$

Nous avons alors

Proposition 10.3.1. *Une boule ouverte est un disque dans le modèle du disque ou du demi plan de Poincaré. De plus, une boule est géodésiquement convexe : un arc géodésique passant par deux points d'une boule est une boule.*

DÉMONSTRATION : D'après la formule (9.4), la boule ouverte centrée à l'origine est un disque. Comme l'image d'un disque par une homographie est un disque nous en déduisons la première partie du résultat.

Pour le deuxième partie du résultat, nous pouvons choisir un modèle du demi-plan tel que la géodésique passant par deux points est une droite affine verticale. Dans ce modèle, une boule est un disque. Comme un disque est convexe, nous en déduisons le résultat.

De plus, "vu de près" une très petite boule ouverte ressemble à une boule euclidienne.

Proposition 10.3.2. *Il existe une fonction ϵ est une fonction qui tend vers zéro en zéro, telle que si B une boule de rayon u centrée en 0 dans le modèle du disque de Poincaré. Alors pour tout a et b de B*

$$|d(a, b) - |a - b|| \leq \epsilon(u).u.$$

DÉMONSTRATION : Soit alors A et B les extrémités de la géodésiques passant par a et b . Notre première remarque est que A et B sont presque opposés:

$$|A + B| \leq \epsilon(u).$$

Voici une preuve de ce fait géométrique par le calcul. On peut supposer après une rotation que $A = 1$. On sait alors que

$$\Re([1, B, i, a]) = 0 \text{ et } \Re([1, B, -i, a]) = 0.$$

Or

$$\Re([1, B, i, a] + [1, B, -i, a]) = \Re\left(\frac{(a-1)(B+1)}{B-a}\right) = \Re(1 + \overline{B}) + \epsilon(u).$$

Ainsi $\Re(1 + B) = \epsilon(u)$. Comme $B = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, nous obtenons $\cos(\theta) = -1 + \epsilon(u)$ et donc que $1 + B = \epsilon(u)$.

Un développement limité nous donne alors

$$\begin{aligned} d(a, b) &= \log[A, B, a, b] \\ &= \log\left(1 - \frac{a}{A} - \frac{b}{B} + \frac{a}{B} + \frac{b}{A} + \epsilon(u)\right) \\ &= |a - b| \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \epsilon(u)\right) \\ &= |a - b| \cdot (1 + \epsilon(u)) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est le résultat recherché.

10.3.2 Angle

Cette dernière proposition nous permet de reconstruire l'angle entre deux géodésiques à l'aide de la distance:

Proposition 10.3.3. *Soit (a, A) et (a, B) deux arcs géodésiques. Pour tout t , soit A_t l'unique point de (a, A) tel que $d(a, A_t) = t$; de même, B_t l'unique point de (a, B) tel que $d(a, B_t) = t$; alors, l'angle β entre les deux arcs vérifie*

$$1 - \cos(\beta) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d(A_t, B_t)^2}{2t^2} \right).$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de la proposition précédente

10.4 Comment caractériser l'espace hyperbolique

Nous venons de voir que la géométrie de l'espace hyperbolique peut être reconstruite à l'aide de la seule distance. Nous n'avons pas parlé du birapport mais celui-ci peut-être reconstruit à partir par exemple de l'angle entre les géodésiques.

Autrement dit, un plan hyperbolique est un espace métrique dont la distance vérifie un certain nombre de propriétés supplémentaires.

Une propriété toute particulière peut caractériser le plan hyperbolique et résumer ainsi les propriétés précédentes, cette propriété se définit à l'aide d'un invariant numérique appelé *courbure*. Malheureusement, définir la courbure sort du cadre de ce cours.

Chapter 11

Les figures du plan hyperbolique

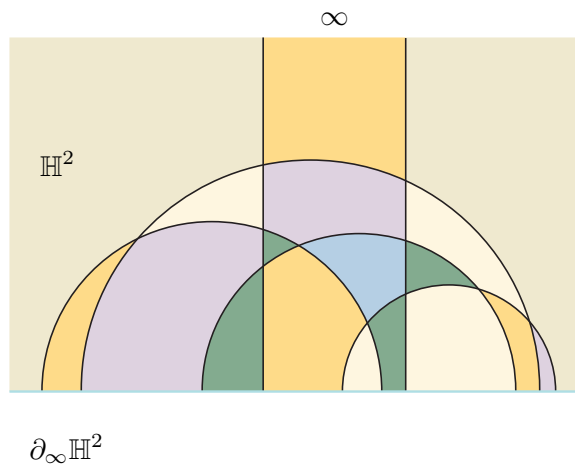


Figure 11.1: Polygones convexes hyperboliques

11.1 Demi-plan, quadrant, polygone convexes, triangles

11.1.1 Ensembles convexes

Définition 11.1.1. [CONVEXE] *qu'un ensemble G est géodésiquement convexe si pour toute paire de points x et y de G ; l'arc géodésique passant par x et y est inclus dans G .*

D'après le modèle projectif de Klein – deuxième version – un ensemble G est convexe si et seulement si, vu comme sous-ensemble du plan affine, il est convexe.

11.1.2 Polygones convexes

Définition 11.1.2. *Un demi-plan est l'une des régions complémentaires d'une géodésique. Un quadrant est l'une des régions complémentaires de la réunion de deux géodésiques orthogonales.*

Un polygone convexe est l'une des composantes connexes comme sur la figure 11.1.

REMARQUES :

1. Tout les demi-plans sont isométriques. Tout les quadrants sont isométriques.
2. Rappelons qu'un ensemble G est géodésiquement convexe si pour toute paire de points x et y de G ; l'arc géodésique passant par x et y est inclus dans G . Un polygone convexe est géodésiquement convexe: en effet un demi plan est géodésiquement convexe et l'intersection d'ensembles géodésiquement convexes est géodésiquement convexe.
3. l'intersection de deux polygone convexes est un polygone convexe.

Proposition 11.1.3. Soit P un polygone convexe. Alors

1. Le polygone P est une intersection finie de demi-plans ouverts.
2. Un polygone convexe est géodésiquement convexe.

DÉMONSTRATION : Ceci se déduit des propriétés correspondantes des polygones dans l'espace affine en utilisant le modèle projectif de Klein.

Proposition 11.1.4. Soit γ_i des géodésiques distinctes. Pour tout i , soit H_i un demi-plans bordé par la géodésique γ_i . Soit P le polygone convexe $P = \bigcap_i H_i$. Soit $\bar{P}$ l'adhérence de P . Soit x un point de $\bar{P}$.

Il existe alors un voisinage convexe B de x pour lequel nous avons l'une des situations suivantes

1. soit $B \subset P$,
2. soit, il existe i tel que $B \cap P = B \cap H_i$, et $x \in \gamma_i$,
3. soit, il existe i et j distincts tels que $\{x\} = \gamma_i \cap \gamma_j$ et $B \cap P = B \cap H_i \cap H_j$, où H_i et H_j sont des demi-plans bordés par γ_i et γ_j

De plus $\bar{P}$ est l'intersection finie de demi-plans fermés: $\bar{P} = \bigcap_i \bar{H}_i$. Enfin, $\bar{P}$ est aussi géodésiquement convexe.

DÉMONSTRATION : Ceci se déduit des propriétés correspondantes des polygones dans l'espace affine en utilisant le modèle projectif de Klein.

Définition 11.1.5. Soit P un polygone convexe. Un sommet de P est un point de $\bar{P}$ qui n'est inclus dans aucun arc géodésique inclus dans $\bar{P}$, c'est aussi un point x tel que $\bar{P} \setminus \{x\}$ est convexe. Un côté de P est un arc γ géodésique fermé tracé dans $\bar{P}$, tel que $P \setminus \{\gamma\}$ est géodésiquement convexe.

REMARQUES :

1. Un point est un sommet de P si et seulement si il correspond au troisième cas de la proposition 11.1.4

La proposition suivante se déduit des propriétés correspondantes des polygones dans l'espace affine en utilisant le modèle projectif de Klein.

Proposition 11.1.6. *Les extrémités d'un côté d'un polygone convexe sont les sommets de ce polygone. Par chaque sommet passe exactement deux côtés. Un polygone convexe a un nombre fini de sommets et de côtés. Un polygone convexe compact a autant de sommets que de côtés.*

11.1.3 Triangles

Définition 11.1.7. *Un triangle de sommets distincts a_1, a_2, a_3 , éventuellement à l'infini, est l'intersection des trois demi-plans P_1, P_2 et P_3 tels que P_i est le demi-plan contenant a_i et complémentaire à la géodésique passant par les deux autres sommets. L'angle au sommet a est l'angle des deux côtés issus de a , ou par convention deux géodésiques qui se rencontrent à l'infini on un angle nul en ce point.*

REMARQUES :

1. Lorsqu'un triangle a ses trois sommets à l'infini on dit que c'est un triangle idéal. Tout les triangles idéaux sont isométriques.

Proposition 11.1.8. [CLASSIFICATION DES TRIANGLES] *Soit p, q, r trois nombres réels strictement positifs tels que $p + q > r$, $p + r > q$ et $q + r > p$. Il existe alors un triangle dont les distances entre les sommets sont exactement p, q et r . Un tel triangle est unique à isométrie près.*

DÉMONSTRATION : Soit x et y deux points à distance p . Les hypothèses entraînent que la boule de rayon p autour de x et de rayon q autour de y s'intersectent. Les bords de ces boules - qui sont des cercles projectifs - s'intersectent en deux points qui sont échangés par la symétrie d'axe (x, y) . L'un quelconque de ces deux points forme le troisième sommet du triangle.

La construction montre que tous les triangles dont les côtés sont de longueur p, q et r sont isométriques.

11.2 Hexagones droits

Définition 11.2.1. *Un hexagone droit – ou demi-pantalon – est un polygone convexe compact ayant six sommets et six côtés et dont les angles aux sommets sont $\pi/2$. Une couture d'un hexagone est la réunion de trois côtés d'intersection vide.*

Proposition 11.2.2. [CLASSIFICATION DES DEMI-PANTALONS] *On se donne trois nombres réels positifs p, q, r . Il existe un unique demi-pantalon dont les longueurs des côtés d'une couture sont p, q et r . Un tel hexagone droit est unique à isométries près.*

DÉMONSTRATION : Soit $\alpha = (\alpha^+, \alpha^-), \beta = (\beta^+, \beta^-), \gamma = (\gamma^+, \gamma^-)$ les géodésiques correspondants au trois autres coutures. Nous pouvons toujours supposer que $\alpha^- = 0, \alpha^+ = \infty, \gamma^+ > \gamma^- >$

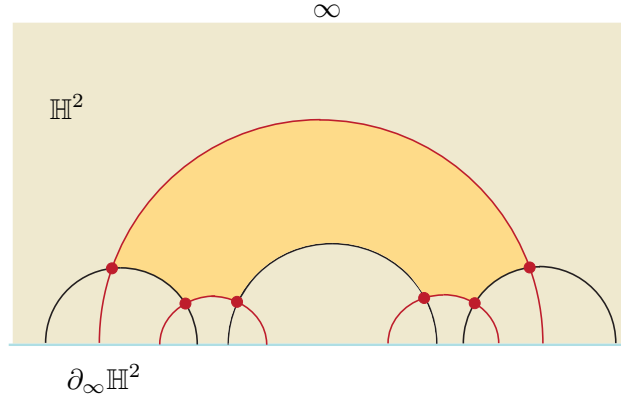


Figure 11.2: Hexagone droit

$\beta^+ = 1 > \beta^-$. D'après la proposition 10.1.4, les longueurs p, q et r des coutures se calculent par

$$\begin{aligned} P = \tanh(p)^2 &= [\alpha^-, \alpha^+, \beta^-, \beta^+], \\ Q = \tanh(q)^2 &= [\alpha^-, \alpha^+, \gamma^-, \gamma^+], \\ R = \tanh(r)^2 &= [\beta^+ \beta^-, \gamma^-, \gamma^+], \end{aligned}$$

Remarquons que P, Q et R tous compris entre 0 et 1. Nous sommes donc amené à résoudre le système

$$S := \begin{cases} \beta^- &= P\beta^+ \\ \gamma^- &= Q\gamma^+ \\ (\beta^+ - \gamma^-)(\beta^- - \gamma^+) &= R(\beta^+ - \gamma^+)(\beta^- - \gamma^-). \end{cases}$$

Nous en déduisons

$$(1 - Q\gamma^+)(P - \gamma^+) = R(P - Q\gamma^+)(1 - \gamma^+).$$

Soit donc F la fonction définie par

$$F(x) = \frac{(P - x)(1 - Qx)}{(1 - x)(P - Qx)}$$

La dérivée de cette fonction est du signe de

$$(Q - 1)(P - 1)(Qx^2 - P).$$

Elle est donc positive sur $[1/Q, \infty[$, car puisque P et Q sont plus grands que 1, si $x > P$

$$Qx^2 > 1/Q > 1 > P.$$

La fonction F donc une bijection de $[1/Q, \infty[$ vers $[0, 1[$. Dès lors, si $R > 1$, il existe une unique solution plus grande que $1/Q$ de l'équation en x définie par

$$F(x) = R(p - 1)(Q - 1).$$

Le système S a donc une solution unique. Nous laissons au lecteur vérifier que ceci entraîne qu'un hexagone droit est déterminé par les longueurs d'un couture à isométrie près.

11.3 Aire

Soit C un ensemble mesurable du demi plan $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid z > 0\}$. L'aire hyperbolique de C est la quantité

$$\text{Aire}_h(C) = \int_C \frac{1}{y^2} dx dy.$$

Proposition 11.3.1. *Soit C un sous-ensemble mesurable du demi-plan de Poincaré et H une isométrie de ce demi-plan. Alors*

$$\text{Aire}_h(C) = \text{Aire}_h(A(C)).$$

Cette proposition nous permet de donner la définition suivante

Définition 11.3.2. *Soit C un sous ensemble mesurable d'un plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Son aire hyperbolique est définie comme l'aire hyperbolique de $\phi(C)$ où ϕ est une isométrie de $\mathbb{H}^2$ vers le demi-plan de Poincaré.*

REMARQUES : L'aire d'un ensemble est invariant par isométrie.

11.4 La formule de Gauß-Bonnet

L'angle à un sommet x d'un polygone P est l'angle α entre les côtés de ce polygone. L'angle extérieur à ce sommet x est $\beta = \pi - \alpha$.

La formule de Gauß-Bonnet pour un polygone convexe compact relie la somme des angles extérieurs et l'aire du polygone.

Théorème 15. [FORMULE DE GAUSS-BONNET] *Soit P un polygone convexe compact. On note S l'ensemble de ses sommets et $\beta(s)$ l'angle extérieur au sommet s . Alors*

$$\sum_{s \in S} \beta(s) = 2\pi + \text{Aire}_h(P). \quad (11.1)$$

Pour les triangles cette formule s'énonce différemment :

Théorème 16. [FORMULE DE GAUSS-BONNET] *Soit T un triangle. Soit α, β et γ ces angles au sommet, alors*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \text{Aire}_h(T). \quad (11.2)$$

REMARQUES : Voici quelques conséquences de la formule de Gauß-Bonnet qui montre à quelle point la situation diffère du cas euclidien.

1. Il n'y a pas de rectangles hyperboliques : la somme des angles intérieurs d'un polygone à quatre côtés est strictement plus petite que 2π . Il n'existe donc pas de polygones convexes à quatre sommets ayant des angles droits.
2. L'aire d'un hexagone droit est π .
3. La somme des angles d'un triangle est strictement plus petite que π .

Nous laissons en exercice la démonstration de la formule de Gauß-Bonnet à partir de la formule de Gauß-Bonnet pour les triangles.

Nous allons démontrer cette formule en procédant par étapes.

11.4.1 La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles idéaux

Nous montrons

Proposition 11.4.1. *Soit T un triangle idéal. Alors*

$$\text{Aire}_h(T) = \pi.$$

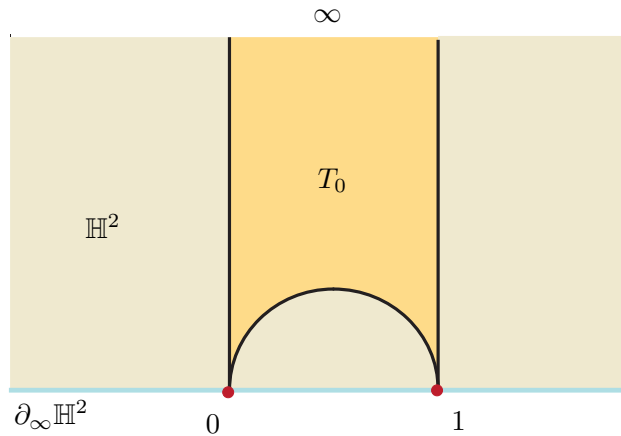


Figure 11.3: Triangle idéal

DÉMONSTRATION : Ceci suit d'un calcul. On se place dans le plan hyperbolique et on envoie les trois sommets en 0, 1 et ∞ comme sur la figure 11.3. Alors

$$T_0 = \{x + iy \mid -1 < x < 1, y > \sqrt{1-x^2}\}.$$

En particulier

$$\text{Aire}_h(T_0) = \int_{-1}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

11.4.2 La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles avec deux points à l'infini

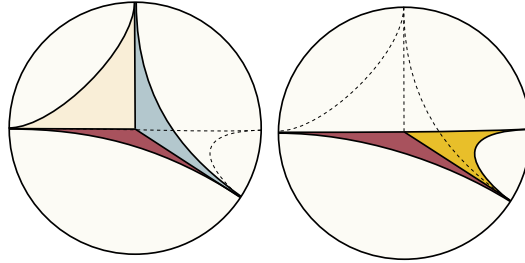


Figure 11.4: Additivité de Gauß

Nous noterons $A(\theta)$ l'aire du triangle hyperbolique dont deux des sommets sont à l'infini et dont l'angle au sommet extérieur est θ . Cette fonction est bien définie car tout ces triangles sont isométriques. La formule de Gauß-Bonnet dans ce cas se réduit à

$$A(\theta) = \theta.$$

Nous savons par la proposition précédente que $A(\pi) = \pi$. La fonction A étant continue, il suffit pour conclure de montrer

Proposition 11.4.2. [ADDITIVITÉ DE GAUSS] *La fonction A est additive : elle vérifie*

$$A(\alpha) + A(\beta) = A(\alpha + \beta).$$

DÉMONSTRATION : Cette formule suit du dessin 11.4.

En effet, l'aire du triangle bleu additionnée à celle du rose est π soustraite de l'aire du triangle marron, et donc égale à celle du triangle jaune.

Par ailleurs la somme des angles extérieurs des triangles bleu et rose est l'angle extérieur au triangle jaune

11.4.3 La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles

La formule de Gauß-Bonnet pour un triangle avec un point à l'infini se démontre à partir de la proposition précédente en utilisant le fait qu'un tel triangle est la différence symétrique entre deux triangles ayant deux points à l'infini.

De même, le cas général de la formule de Gauß-Bonnet se démontre à utilisant le fait qu'un triangle est la différence symétrique entre deux triangles ayant un point à l'infini.

Ces deux cas sont traités dans la figure 11.5 ou à chaque fois on compare l'aire du triangle rose avec la différence entre l'aire du triangle bicolore jaune et marron avec celle du triangle marron.

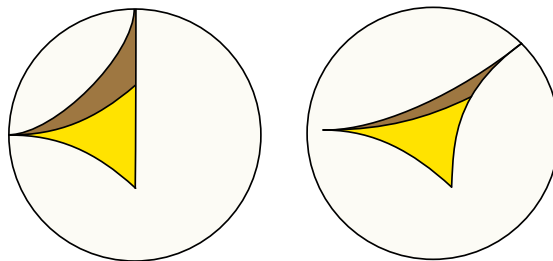


Figure 11.5: Formule de Gauß-Bonnet

Chapter 12

Surfaces hyperboliques

Nous allons donner la définition de plusieurs types de surfaces hyperboliques. Commençons par une définition

Définition 12.0.1. Soit X et Y deux espaces métriques. Soit x un point de X et y un point de Y . Une isométrie locale de (X, x) vers (Y, y) est la donnée d'un réel r strictement positif, d'une bijection ϕ entre la boule de rayon r de centre x et celle de rayon r de centre y , tels que

$$\forall z, t \in B(x, r), \quad d(z, t) = d(\phi(z), \phi(t)).$$

Nous dirons également que (X, x) et (Y, y) sont localement isométriques.

Nous dirons que X est modelé sur Y si pour tout point de x , il existe un point y de Y tel que (X, x) est localement isométrique à (Y, y) ; Y est le modèle de X .

REMARQUES :

1. Le plan hyperbolique est modelé sur le demi-plan hyperbolique ; la réciproque n'est pas vraie.
2. De même, le demi-plan hyperbolique est modelé sur le quadrant hyperbolique ; la réciproque n'est pas vraie.
3. Enfin si Q est un quadrant, si (Q, x) est localement isométrique à (Q, y) alors x est le sommet de Q si et seulement si y est le sommet de Q , de même x appartient à un côté de Q si et seulement si y appartient à un côté de Q . En effet, être un sommet ou appartenir au bord est par la définition une condition métrique et donc invariante par isométrie locale.

12.1 Premières définitions

Voici les différentes définitions.

Définition 12.1.1. 1. Une surface hyperbolique est un espace métrique modelé sur le plan hyperbolique.

2. Une surface hyperbolique à bord géodésique est un espace métrique modelé sur le demi-plan hyperbolique.
3. Une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés est un espace métrique modelé sur le quadrant hyperbolique.

REMARQUES :

1. Notre premier exemple de surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés est un polygone convexe dont tous les angles sont droits: ceci suit de la proposition 11.1.4.
2. Par ailleurs, toute surface hyperbolique est également hyperbolique à bord géodésique; nous verrons plus tard que son *bord* est vide. De même, toute surface hyperbolique à bord géodésique est également hyperbolique à bord géodésique et coins carrés; nous verrons plus tard qu'elle n'a pas de *coins*.
3. Une surface hyperbolique est localement compacte et localement connexe par arcs. Ceci suit de la propriété correspondante pour l'espace hyperbolique.

12.1.1 Cartes et coordonnées

Définition 12.1.2. Soit S une surface hyperbolique à bord géodésique et coin carré. Une carte de rayon ϵ au voisinage d'un point x de S , est une paire (B, ϕ) où B est une boule de rayon ϵ contenant x et ϕ une isométrie de B sur une boule du quadrant hyperbolique.

Si (B, ϕ) est une carte, on dit que B est le domaine de la carte et ϕ les coordonnées de la carte.

12.1.2 Bord et coins

Lorsque nous sommes en présence d'une surface à bord géodésique et coins carrés, nous allons identifier son bord et ses coins.

Définition 12.1.3. Soit S une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés. Notons Q le quadrant hyperbolique.

1. Un point x de S est un coin, si et seulement si (S, x) est localement isométrique à (Q, s_0) où s_0 est le sommet de Q .
2. Un point x de S est au bord de S , si et seulement si (S, x) est localement isométrique à (Q, s) où s appartient à un côté de Q .
3. le bord de S , noté ∂S est l'ensemble des points au bord de S .

D'après la remarque (3) de l'introduction de ce chapitre, si S et Σ sont deux surfaces hyperboliques, si (S, x) et (Σ, y) sont localement isométriques alors x est un coin si et seulement si y est un coin, de même x appartient au bord, si et seulement si y appartient au bord.

12.2 Longueur des courbes et distance riemannienne

Nous voulons définir la longueur des courbes. Nous allons définir la longueur des courbes C^1 par morceaux et pour cela nous devons définir les courbes C^1 par morceaux.

12.2.1 Courbes et longueurs

Définition 12.2.1. Une courbe à valeurs dans une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés S est une application continue γ d'un intervalle I à valeurs dans S . Une telle courbe est C^1 par morceaux si pour tout x , il existe une carte (B, ϕ) au voisinage U de x dans I , telle que $c(U) \subset B$ et $\phi \circ \gamma$ est C^1 par morceaux.

On remarque que si γ est une courbe C^1 par morceaux définie de I dans S , il existe alors une famille $\{(I_i, \phi_i)\}_{i \in A}$ – où A est dénombrable – telle que

- les intervalles I_i partitionnent I :

$$I = \bigsqcup_{i \in A} I_i.$$

- pour tout i , ϕ_i est une isométrie locale définie au voisinage de $\gamma(I_i)$.

Une telle famille $\{(I_i, \phi_i)\}_{i \in A}$ s'appelle une *découpe* de γ .

Nous avons alors

Proposition 12.2.2. Soit γ une courbe et $\mathcal{A} = \{(I_i, \phi_i)\}_{i \in A}$ une découpe de γ . Alors la quantité

$$\ell_{\mathcal{A}}(\gamma) = \sum_{i \in A} \ell_h(\phi_i \circ \gamma(I_i)),$$

ne dépend pas du choix de la découpe.

Cette proposition nous permet d'introduire les définitions suivantes :

Définition 12.2.3. Soit γ une courbe C^1 par morceaux. Soit $\mathcal{A} = \{(I_i, \phi_i)\}_{i \in A}$ une découpe de γ . La longueur de la courbe γ est la quantité

$$\ell(\gamma) = \sum_{i \in A} \ell_h(\phi_i \circ \gamma(I_i)),$$

Une courbe $\gamma : I \rightarrow S$ est paramétrée par l'arc si pour tout t et s de I ,

$$\ell(\gamma|_{[t,s]}) = |t - s|.$$

DÉMONSTRATION : Soit $\mathcal{A} = \{(I_i, \phi_i)\}_{i \in A}$ et $\mathcal{B} = \{(J_j, \psi_j)\}_{j \in B}$ deux découpes.

Supposons tout d'abord que les intervalles J_j sont des raffinements des intervalles I_i , autrement dit que pour tout i , il existe un ensemble B_i , tel que

$$I_i = \bigsqcup_{j \in B_i} J_j.$$

Supposons également dans ce cas que $\phi_j|_{\gamma(I_i)} = \phi_i|_{\gamma(I_i)}$ si $j \in B_i$, alors l'additivité de la longueur entraîne que

$$\ell_{\mathcal{A}}(\gamma) = \ell_{\mathcal{B}}(\gamma).$$

Nous pouvons donc supposer en prenant les intersections des intervalles que $A = B$ et que $I_i = J_i$. Il suffit donc de démontrer que

$$\ell_h(\phi_i \circ \gamma(I_i)) = \ell_h(\psi_i \circ \gamma(I_i)).$$

or $H = \psi_i \circ \phi_i^{-1}$ préserve la distance. Par le théorème d'extension 14, H est la restriction d'une isométrie et préserve les longueurs. Ainsi

$$\ell_h(\phi_i \circ \gamma(I_j)) = \ell_h(H \circ \psi_i \circ \gamma(I_i)) = \ell(\psi_i \circ \gamma(I_i)).$$

Nous avons terminé notre preuve.

Il est important de minimiser la longueur des courbes.

Proposition 12.2.4. [MINORER LA LONGUEUR DES COURBES] *Soit x un point de S et $\epsilon_0 > 0$ tel que $B(x, \epsilon_0)$ est isométrique à une boule du quadrant par l'application ϕ . Soit $\alpha < \epsilon_0$. Soit c une courbe joignant un point z appartenant à $B(x, \alpha)$ à un point y n'appartenant pas à $B(x, \epsilon_0)$. Alors*

$$\ell(c) > \epsilon_0 - \alpha.$$

DÉMONSTRATION : En effet supposons $c(0) = z$ et $c(a) = y$. Par le théorème des valeurs intermédiaire appliqué à la fonction $t \rightarrow d(x, c(t))$, il existe un intervalle $[0, u]$ tel que

1. $c[0, u[\subset B(x, \epsilon_0)$,
2. $d(x, c(u)) = \epsilon_0$.

Alors

$$\ell(c) \geq \ell(\phi \circ c|_{[0, u]}).$$

Comme la distance hyperbolique minimise la longueur, nous avons

$$\ell(\phi \circ c|_{[0, u]}) \geq d_h(\phi \circ c(0), \phi \circ c(u)).$$

En utilisant successivement l'inégalité triangulaire et le fait que ϕ est une isométrie, nous avons

$$d_h(\phi \circ c(0), \phi \circ c(u)) \geq d_h(\phi(x), \phi \circ c(u)) - d_h(\phi \circ c(0), x) = d(x, c(u)) - d(c(0), x) \geq \epsilon_0 - \alpha.$$

Nous obtenons le résultat en combinant ces inégalités.

12.2.2 La distance riemannienne

Au départ, une surface hyperbolique est un espace métrique. Ceci dit la distance initiale pourrait ne pas être très intéressante. Remarquons en effet que si f est une fonction croissante, égale à l'identité au voisinage de 0, alors l'espace hyperbolique muni de la distance $d_f(x, y) = f(d(x, y))$ est modelé sur le plan hyperbolique. Il existe cependant sur une surface hyperbolique une meilleure métrique que nous appellerons *riemannienne*

Définition 12.2.5. *Soit x et y deux points d'une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés connexe. La distance riemannienne entre x et y est*

$$d_R(x, y) := \inf\{\ell(c) \mid c \text{ courbe } C^1 \text{ par morceaux joignant } x \text{ à } y\}$$

On montre aisément qu'il existe toujours une courbe C^1 par morceaux joignant deux points d'une surface connexe.

Proposition 12.2.6. *Soit S une surface hyperbolique muni d'une métrique d . Soit x un point de S , il existe alors $\epsilon > 0$, tel que*

1. *si $d(y, x) > \epsilon$ alors $d_R(y, x) > \epsilon$.*
2. *si z et t appartiennent à la boule de centre x de rayon ϵ alors $d_R(z, t) = d(z, t)$.*

Corollaire 12.2.7. 1. *La surface S munie de la distance riemannienne est localement isométrique en tout point à la surface S muni de la distance initiale.*

2. *La distance riemannienne est une distance.*

A partir de maintenant, nous munirons toujours une surface hyperbolique de sa distance riemannienne.

DÉMONSTRATION : Notons Q le quadrant. Soit x un point de S . Soit $\epsilon_0 > 0$, tel qu'il existe un point x_0 de Q , une isométrie ϕ de $B(x, \epsilon_0)$ avec

$$B_h = \{w \in Q \mid d_h(w, x) \leq \epsilon_0\} \cap Q.$$

Posons enfin $\epsilon = \epsilon_0/4$. Soit tout d'abord y n'appartenant pas à $B(x, \epsilon)$ et c une courbe joignant x à y . D'après la proposition 12.2.4 pour $\alpha = 0$, nous avons

$$\ell(c) \geq \epsilon.$$

Ceci démontre le premier point.

Soit maintenant c une courbe quelconque joignant deux points z et y de la boule $B(x, \epsilon)$,

- si $c \subset B(x, \epsilon_0)$, alors

$$\ell(c) = \ell(\phi(c)) \geq d_h(\phi(z), \phi(y)) = d(z, y).$$

- si c sort de la boule $B(x, \epsilon_0)$, alors $\ell(c) \geq 2\epsilon \geq d(z, y)$, en appliquant la proposition 12.2.4 pour $\alpha = \epsilon_0/4$

Nous obtenons donc que, pour toute courbe c joignant deux points z et y de la boule $B(x, \epsilon)$, nous avons

$$\ell(c) \geq d(z, y).$$

En particulier,

$$d_R(z, y) \geq d(z, y). \quad (12.1)$$

Enfin, comme $\phi(B)$ est convexe, il existe une courbe c tracée dans $\phi(B)$ tel que

$$\ell(c) = d_h(\phi(z), \phi(y)).$$

Il existe donc une courbe $c_0 = \phi^{-1} \circ c$, telle que

$$\ell(c_0) = d_h(z, y).$$

Ainsi,

$$d_R(z, y) \leq d(z, y). \quad (12.2)$$

et en combinant les deux inégalités (12.1) et (12.2)

$$d_R(z, y) = d(z, y).$$

12.3 Géodésiques

Des courbes jouent un rôle particulier.

Définition 12.3.1. Une courbe C^1 par morceaux $\gamma : I \rightarrow S$ est une géodésique, pour tout x de I , il existe un intervalle J qui est un voisinage de x dans I tel que

$$\forall y, z \in J, \quad d(\gamma(y), \gamma(z)) = |y - z|.$$

La proposition suivante donne quelques propriétés élémentaires des géodésiques.

Proposition 12.3.2. 1. Si γ est une géodésique, alors $d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq |t - s|$.

2. Si γ est une géodésique alors γ est paramétrée par l'arc: $\ell(\gamma|_{[s,t]}) = |s - t|$.

REMARQUES :

1. En particulier, une géodésique minimise localement la longueur : pour tout x de I , il existe un intervalle J qui est un voisinage de x dans I tel que

$$\forall y, z \in J, \quad d(\gamma(y), \gamma(z)) = \ell(\gamma|_{[y,z]}).$$

2. Cette notion de géodésique coïncide avec celle des géodésiques usuelles dans le plan hyperbolique, le demi-plan hyperbolique et le quadrant.
3. Nous avons même un résultat plus précis. Soit $c :]u, v[$ dans le plan hyperbolique, le demi-plan hyperbolique ou le quadrant qui minimise localement la longueur. Alors c est un arc géodésique. Ceci suit de la proposition 10.1.1.
4. Nous en déduisons que si c est une géodésique, si ϕ est une isométrie d'une boule contenant c dans une boule du quadrant. Alors l'image de c par ϕ est un arc géodésique.
5. Par contre, nous verrons plus tard que les géodésiques ne minimisent pas toujours globalement la longueur contrairement au cas du plan hyperbolique.
6. Une géodésique γ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est *périodique* s'il existe un T strictement positif tel que

$$\forall s, \gamma(s + T) = \gamma(s).$$

La période de γ est alors

$$T = \inf\{t > 0 \mid \gamma(s + t) = \gamma(s)\}.$$

On remarque que la période d'une géodésique périodique est strictement positive ; en effet une géodésique est toujours localement injective car localement minimisante.

12.3.1 Extension des géodésiques

Définition 12.3.3. Soit γ et $\bar{\gamma}$ deux géodésiques définies sur des intervalles I et J respectivement, nous dirons que γ étend $\bar{\gamma}$ si $J \subset I$ et

$$\gamma|_J = \bar{\gamma}|_J.$$

Nous dirons qu'une géodésique γ définie sur un intervalle I est maximale, si pour toute géodésique $\bar{\gamma}$ définie sur un intervalle J tel que $J \cap I$ est d'intérieur non vide, telle que γ étend $\bar{\gamma}$ restreinte à $I \cap J$, alors $J \subset I$ et γ étend $\bar{\gamma}$.

Notre but est le théorème suivant

Théorème 17. [LES GÉODÉSQUES ONT UNE EXTENSION MAXIMALE] Soit $\bar{\gamma} :]a, b[\rightarrow S$ une géodésique. Il existe alors une unique géodésique maximale $\gamma : I \rightarrow S$ qui étend $\bar{\gamma}$.

De plus, si S est un espace métrique complet alors l'intervalle I est fermé.

Commençons par un lemme de prolongement.

Lemme 12.3.4. Soit γ_1 et γ_2 définie sur des intervalles I_1 et I_2 respectivement tels que $I_1 \cap I_2$ est d'intérieur non vide. On suppose que γ_1 et γ_2 coïncident sur un intervalle ouvert non vide contenant a . Alors, il existe une géodésique γ qui étend à la fois γ_1 et γ_2 .

DÉMONSTRATION : Remarquons tout d'abord que la proposition est vraie pour les géodésiques du quadrant hyperbolique. Montrons tout d'abord que γ_1 et γ_2 coïncident sur $I_1 \cap I_2$.

$$\begin{aligned} k_1 &= \inf\{t \in I_1 \cap I_2 \mid t > a, \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\}, \\ k_2 &= \sup\{t \in I_1 \cap I_2 \mid t > a, \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\}. \end{aligned}$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $k_1 \in \text{int}(I_1 \cap I_2)$. Alors $\gamma_1(k_1) = \gamma_2(k_2) := x$. Soit $\epsilon > 0$ tel que la boule B de centre x de rayon ϵ est isométrique à une boule du quadrant. Comme la proposition est vraie dans le quadrant, nous en déduisons que γ_1 et γ_2 coïncident au voisinage de k_1 et la contradiction. Un raisonnement analogue sur k_2 montre que γ_1 et γ_2 coïncident sur $I_1 \cap I_2$.

Ensuite, soit γ la courbe définie par $\gamma = \gamma_1$ sur I_1 et $\gamma = \gamma_2$ sur I_2 . Comme $I_1 \cap I_2$ est d'intérieur non vide, tout point de $I_1 \cup I_2$ a un voisinage inclus soit dans I_1 soit dans I_2 . Cette observation entraîne que γ minimise localement la longueur puisque γ_1 et γ_2 le font. Nous allons maintenant démontrer le théorème.

DÉMONSTRATION : Nous dirons que t est *sup-admissible* s'il existe une géodésique γ définie sur $]a, t]$ qui étend $\bar{\gamma}$. Soit alors

$$k_1 = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ sup-admissible}\}.$$

Remarquons que $k_1 \geq b$. Supposons que $k_1 < \infty$. D'après le lemme précédent, il existe une géodésique γ définie sur $]a, k_1[$ étendant $\bar{\gamma}$. Pour toute suite $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers k_1 , la suite $\{\bar{\gamma}(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Ainsi que γ définie sur $]a, k_1[$. Par le lemme précédent si γ_1 est définie sur un intervalle $]c, d[$ avec $c \in]a, k_1[$ coïncide avec $\bar{\gamma}$ sur un intervalle ouvert alors, d est admissible et donc γ étend γ_1 . Un raisonnement analogue pour la borne inférieure montre que γ est maximale et définie sur un intervalle fermé.

La proposition suivante décrit les géodésiques maximales.

Proposition 12.3.5. *Soit γ une géodésique maximale définie sur un intervalle fermé I . Soit c une borne de I . Alors $\gamma(c)$ appartient au bord de S .*

Soit γ une géodésique maximale dont une restriction à un intervalle est incluse dans le bord. Alors, γ tout entière est à valeurs dans le bord et ses extrémités – si elles existent – sont des coins.

En particulier si le bord de S est vide, alors $I = \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION : En effet, supposons que $\gamma(c)$ soit dans l'intérieur de S . Alors il existe une boule autour de $\gamma(c)$ isométrique à une boule du plan hyperbolique, nous pouvons alors prolonger γ au-delà de c car nous pouvons le faire dans le plan hyperbolique..

12.3.2 Géodésiques globalement minimisantes

Définition 12.3.6. *Une géodésique $\gamma : I \rightarrow S$ est globalement minimisante si*

$$\forall y, z \in I, \quad d(\gamma(y), \gamma(z)) = |y - z|.$$

REMARQUES :

1. Une géodésique entre x et y est globalement minimisante si $\gamma(0) = x$ et $\gamma(d(x, y)) = y$.
2. Une courbe c entre x et y est une géodésique globalement minimisante si $c(0) = x$, $c(d(x, y)) = y$ et $d(c(t), c(s)) \geq |t - s|$.
3. Dans le cas du plan hyperbolique toute géodésique est globalement minimisante.
4. Cela ne sera plus le cas pour les surfaces hyperboliques en général : nous verrons qu'il existe des géodésiques périodiques.

Le théorème de Hopf-Rinow nous garantit l'existence d'une géodésique minimisante entre deux points quelconques.

Théorème 18. [HOPF-RINOW] *Soit S une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés, connexe et complète en tant qu'espace métrique. Il existe toujours une géodésique minimisante entre deux points.*

DÉMONSTRATION : Soit x un point de S . Soit

$$S_x(\epsilon) = \{y \mid d(y, x) = \epsilon\}.$$

Soit y un point quelconque et $\epsilon < d(y, x)$. Pour ϵ suffisamment petit, $S_x(\epsilon)$ est compact, et il existe z appartenant à $S_x(\epsilon)$ tel que

$$d(z, y) = \inf\{d(u, y) \mid u \in S_x(\epsilon)\}.$$

Par ailleurs pour tout courbe c joignant x à y , par continuité de la fonction distance.

$$\ell(c) \geq d(y, z) + \epsilon.$$

Nous en déduisons que

$$d(x, y) = d(y, z) + \epsilon.$$

Soit maintenant γ la géodésique maximale passant par x et z , telle que $\gamma(0) = x$ et définie sur un intervalle J . Considérons alors

$$K = \sup\{t \in J \mid d(x, y) = d(y, \gamma(t)) + t\}.$$

Comme J est fermé, K est également fermé. Soit alors $s = \sup(K)$. Pour conclure, il nous suffit de montrer que $s = d(x, y)$. On remarque que $s \leq d(x, y)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $s < d(x, y)$. Par définition de s , nous avons alors $\gamma(s) \neq y$. Soit donc $\epsilon > 0$ tel que

- $B(\gamma(s), \epsilon)$ est isométrique à une boule du quadrant.
- $\epsilon < d(\gamma(s), y)$.

Raisonnons comme auparavant, et soit u appartenant à $S_{\gamma(s), \epsilon}$ pour ϵ suffisamment petit tel que

$$d(y, \gamma(s)) = d(y, u) + \epsilon.$$

Alors

$$d(y, x) = d(y, \gamma(s)) + s = d(y, u) + s + u.$$

Soit ensuite c la courbe composée de la géodésique γ de x à $\gamma(s)$ et de la géodésique de $\gamma(s)$ à u . Alors

1. $c(0) = x, c(s + \epsilon) = u$.
2. $d(c(t), c(r)) \geq |t - r|$.
3. $d(c(0), c(s + \epsilon)) = d(x, u) \geq d(y, u) - d(x, y) = s + u$.

Donc c est une géodésique globalement minimisante. Par maximalité de γ , c coïncide avec γ . Dès lors particulier $s + \epsilon \in K$. Nous obtenons donc que $s \geq s + \epsilon$ ce qui est la contradiction recherchée.

Chapter 13

Construction par recollement

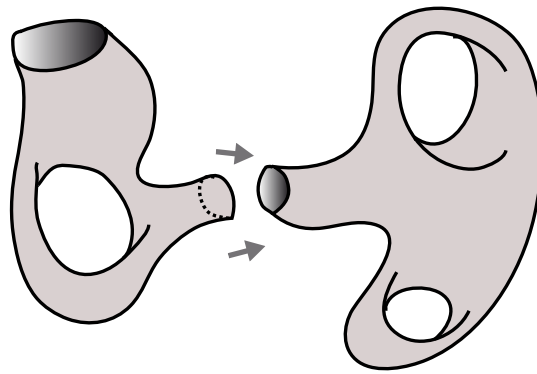


Figure 13.1: Recollement

Nous voulons recoller des surfaces hyperboliques le long de leur bord. Nous avons besoin de définitions

Définition 13.0.1. *Une arête du bord d'une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés est une géodésique maximale incluse dans le bord de la surface.*

REMARQUES :

1. Nous avons vu dans la proposition [12.3.5](#) que les extrémités d'une arête – si elles existent – sont des coins.

13.1 Recollement et espace quotient

Nous nous donnons une surface S à bord géodésique et coins carrés. Soit γ_1 et γ_2 deux arêtes différentes définies sur des intervalles I_1 et I_2 de même longueur. On suppose par ailleurs que

- si γ_1 et γ_2 sont périodiques, alors elles ont la même période T .
- si γ_1 et γ_2 sont des longueur finies, alors les extrémités de γ_1 sont distinctes, de même que les extrémités de γ_2 .

Nous nous donnons enfin une isométrie ϕ de I_1 sur I_2 .

Nous en déduisons une application noté également ϕ de $\gamma(I_1)$ dans $\gamma(I_2)$

Proposition 13.1.1. *Si x est un point de $\gamma_1(I_1)$, il existe $\epsilon > 0$, tels que z et t sont des points de $\gamma_1(I_1)$ tels que $d(x, z) < \epsilon$ et $d(x, t) < \epsilon$ sont des points de S , alors*

$$d(\phi(z), \phi(t)) = d(z, t).$$

DÉMONSTRATION : Il suffit de prendre ϵ de telle sorte que les boules de centre x et $\phi(x)$ de rayon ϵ soient isométriques à une boule du demi-plan hyperbolique.

Définition 13.1.2. *Le recollement de S par ϕ est l'espace $S_\phi = S / \sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par*

$$x \sim y$$

si et seulement si $x = y$, ou $x = \gamma_1(s)$ et $y = \gamma_2(\phi(s))$. Nous noterons π la projection de S sur S_ϕ . Nous noterons également

$$\dot{S} = S \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2).$$

Nous ne demandons pas à S d'être connexe. Nous remarquons que π est une bijection de $\dot{S}$ sur son image.

EXERCICES :

1. **RECOLLEMENT DE DEMIE-BOULES:** Soit x un point appartenant au bord d'un demi-plan hyperbolique P bordé par la géodésique γ . Soit S_0 une surface hyperbolique isométrique par ψ_0 à

$$B = \{y \in P \mid d(x, y) < \epsilon\}.$$

Soit S_1 une autre surface isométrique par ψ_1 à B . Soit ensuite $a :]-\epsilon, \epsilon[$ – respectivement b – l'arête de S – respectivement l'arête de Σ . On considère $\phi = \text{id}$ de $] - \epsilon, \epsilon[$ dans lui-même. Soit enfin, σ la symétrie par rapport à la géodésique γ .

Montrez que l'application Ψ de $S_0 \sqcup S_1$ dans la boule $B(x, \epsilon)$ de centre x de rayon ϵ , donnée par

$$\forall x \in S_0, \Psi(x) = \psi_0(x), \forall x \in S_1, \Psi(x) = \sigma\psi_1(x),$$

donne naissance à une bijection, que nous noterons ψ de $(S_0 \sqcup S_1) / \sim$ dans $B(x, \epsilon)$.

2. **RECOLLEMENT DE QUART DE BOULE:** Énoncez une construction analogue pour les quarts de boules.
3. Représentez-vous visuellement le recollement de deux hexagones droits isométriques le long de leur couture.

13.2 Une distance sur le quotient

13.2.1 Courbes et longueurs

Définition 13.2.1. Soit c une application de $[a, b]$ dans S_ϕ . Nous dirons que c est adaptée au recollement s'il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

et des courbes $c_i \in C^1$ par morceaux à valeurs dans S définie sur $[x_i, x_{i+1}]$ telles que

- $\pi \circ c_i = c|_{[x_i, x_{i+1}]}$,
- $\pi \circ c_i(x_{i+1}) = \pi \circ c_{i+1}(x_{i+1})$.

La longueur de c est alors

$$\ell(c) = \sum_i \ell(c_i).$$

EXERCICE : Montrez que l'application ψ définie en 1 du paragraphe précédent préserve la longueur des courbes: si c est une courbe adaptée, alors $\psi(c)$ est une courbe adaptée et de plus $\ell(\psi(c)) = \ell(c)$.

Minoration de la longueur des courbes

Nous allons démontrer une proposition utile qui nous permet de minorer la longueur des courbes adaptées. Il s'agit d'une généralisation de 12.2.4. Cette proposition nous garantit que les courbes sortant d'une boule sont de grande longueur.

Proposition 13.2.2. Soit x un point de γ_1 . Nous supposons que ϵ_0 est telle que les boules de centre x et $\phi(x)$ de rayon ϵ_0 sont isométriques des boules du quadrant. Pour tout $\alpha < \epsilon_0$, posons

$$\overline{B}_\alpha = \pi(B(x, \alpha) \cup B(\phi(x), \alpha)).$$

Soit alors z et t deux points de $\overline{B}_\alpha$. Si c est une courbe adaptée joignant z à t qui n'est pas incluse dans $\overline{B}_{\epsilon_0}$, alors

$$\ell(c) \geq \epsilon_0 - \alpha.$$

DÉMONSTRATION : Remarquons tout d'abord que

$$\pi^{-1}(\overline{B}_\alpha) = B(x, \alpha) \cup B(\phi(x), \alpha).$$

Soit maintenant c une courbe adaptée. Soit c_i et $x_0 < \dots < x_n$ comme dans la définition. Si c n'est pas incluse dans $\overline{B}_{\epsilon_0}$, alors il existe s , tel que $s \in [x_i, x_{i+1}]$ telle que

$$c_i(s) \notin B(x, \alpha) \cup B(\phi(x), \alpha).$$

Soit alors

$$i_0 = \inf\{i \mid \exists s \in [x_i, x_{i+1}], c_i(s) \notin B(x, \alpha) \cup B(\phi(x), \alpha)\}.$$

Soit y_i le point de γ_1 tel que

$$y_i \sim (c_i(x_i)) \sim (c_{i-1}(x_i)).$$

Notre première remarque est que si $j < i_0$

$$\ell(c_i) \geq d(y_i, y_{i+1})$$

En effet

- soit $c_i(x_i)$ et $c_i(x_{i+1})$ appartiennent tous deux à γ_1 et

$$\begin{aligned} \ell(c_i) &\geq d(c_i(x_i), c_i(x_{i+1})) \\ &= d(y_i, y_{i+1}). \end{aligned}$$

- soit ils appartiennent tous deux à γ_2 et alors

$$\begin{aligned} \ell(c_i) &\geq d(c_i(x_i), c_i(x_{i+1})) \\ &= d(\phi \circ c_i(x_i), \phi \circ c_i(x_{i+1})) \\ &= d(y_i, y_{i+1}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la proposition 12.2.4 appliquée soit à x soit à $\phi(x)$,

$$\ell(c_{i_0}) \geq \epsilon_0 - d(y_{i_0}, x).$$

Nous en déduisons finalement que

$$\begin{aligned} \ell(c) &\geq \sum_{i=0}^{i=i_0} \ell(c_i) \\ &\geq \epsilon_0 - d(y_{i_0}, x) + d(y_{i_0}, z) \\ &\geq \epsilon_0 - d(x, z) \\ &\geq \epsilon_0 - \alpha. \end{aligned}$$

13.2.2 Distance riemannienne

Ceci nous permet de définir une "distance" sur S_ϕ par

Définition 13.2.3. Soit x et y deux points de S_ϕ . S'il n'existe pas de courbe adaptée joignant x à y , nous posons $d(x, y) = \infty$; Sinon, nous posons

$$d(x, y) = \inf\{\ell(c) \mid c \text{ adaptée joignant } x \text{ à } y\}.$$

Recollement de demi-boules

Notre premier lemme nous permet de comprendre le recollement de deux demi-boules (ou de quart de boule).

Lemme 13.2.4. Soit x un point appartenant au bord d'un demi-plan hyperbolique P bordé par la géodésique γ . Soit S_0 une surface hyperbolique isométrique par ψ_0 à

$$B = \{y \in P \mid d(x, y) < \epsilon\}.$$

Soit S_1 une autre surface isométrique par ψ_1 à B . Soit ensuite $a :] - \epsilon, \epsilon[$ – respectivement b – l'arête de S – respectivement l'arête de Σ . On considère $\phi = \text{id}$ de $] - \epsilon, \epsilon[$ dans lui-même.

Alors $(S_0 \sqcup S_1) / \sim$ est isométrique à la boule de rayon ϵ de $\mathbb{H}^2$.

Nous avons un lemme analogue pour les quarts de boules.

Lemme 13.2.5. Soit x un sommet du quadrant hyperbolique Q . Soit S une surface hyperbolique isométrique à

$$\hat{B} = \{y \in Q \mid d(x, y) < \epsilon\}.$$

Soit Σ une autre surface isométrique à $\hat{B}$. Soit ensuite $a : [0, \epsilon[$ – respectivement b – une arête de S – respectivement une arête de Σ . On considère $\phi = \text{id}$ de $[0, \epsilon[$ dans lui-même. Alors $(S \sqcup \Sigma) / \sim$ est isométrique à la boule B de rayon ϵ du demi plan centrée sur un point du bord.

La démonstration du premier lemme repose sur les exercices faits dans les paragraphes précédents : l'application ψ construite lors de ces exercices est une isométrie.

13.2.3 Recollement de surface

Nous allons montrer

Théorème 19. L'espace S_ϕ muni de d est une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés. De plus, π est une isométrie locale de S sur son image. Enfin, $\pi(\gamma_1)$ est une géodésique de S_ϕ . Si S a n -arêtes et p coins. Alors S_ϕ a moins de $n - 2$ arêtes. Si γ_1 a k extrémités (avec $0 \leq k \leq 2$) alors S_ϕ a $p - 2k$ coins.

Dire que π est une isométrie locale, c'est dire que pour tout x de S il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout z et t de $B(x, \epsilon)$,

$$d(\pi(z), \pi(t)) = d(z, t).$$

Nous allons démontrer ce théorème en plusieurs étapes.

Étape 1: π est une isométrie locale.

Soit tout d'abord z et t deux points de S . L'image par π d'une courbe dans S joignant z à t est adaptée. En particulier

$$\begin{aligned} d(z, t) &= \inf\{\ell(c) \mid c \text{ joignant } z \text{ à } t\} \\ &\geq \inf\{\ell(c) \mid c \text{ adaptée joignant } \pi(z) \text{ à } \pi(t)\} \\ &\geq d(\pi(z), \pi(t)) \end{aligned}$$

Nous allons démontrer l'inégalité opposée. Soit x un point de S . Soit $\epsilon = \frac{1}{4}\epsilon_0$ un réel positif. Soit alors z et t deux points de $B(x, \epsilon)$. Notons Soit maintenant c une courbe adaptée joignant $\pi(z)$ à $\pi(t)$. Il nous suffit de montrer que, pour ϵ suffisamment petit $\ell(c) \geq d(z, t)$.

Distinguons trois cas.

Tout d'abord supposons que $x \in \dot{S}$. On peut choisir ϵ_0 suffisamment petit pour que $B(x, \epsilon_0)$ soit aussi inclus dans $\dot{S}$ et vérifie les hypothèses de la proposition 12.2.4. Si c est une courbe adaptée joignant z à t , nous avons deux situations:

- La courbe $c = \pi(c_0)$ est tracée dans $B(x, \epsilon_0)$ dans ce cas

$$\ell(c) = \ell(\pi(c_0)) = \ell(c_0) \geq d(z, t).$$

- La courbe c_0 sort de $B(x, \epsilon_0)$ et dans ce cas par la proposition 12.2.4

$$\ell(c) \geq \ell(\pi(c_0)) = \ell(c_0) \geq \frac{3\epsilon_0}{4} \geq d(z, t).$$

Supposons maintenant que $x \in \gamma_1$. Nous noterons comme dans la proposition 13.2.2,

$$\overline{B}_\alpha = \pi(B(x, \alpha) \cup B(\phi(x), \alpha)).$$

nous choisissons alors ϵ_0 suffisamment petit produit par la proposition 13.2.2 et posons $\epsilon = \epsilon_0/4$. Nous avons à nouveau deux cas,

- La courbe c est incluse dans $\overline{B}_\epsilon$. Soit alors Ψ l'application de $\overline{B}_\epsilon$ dans la boule de rayon ϵ du plan hyperbolique. Nous savons alors que

$$\ell(c) = \ell(\Psi(c)) \geq d(\Psi(z), \Psi(t)) = d(z, t).$$

- La courbe c sort de $\overline{B}_\epsilon$. Dans ce cas, d'après la proposition 13.2.2, on a

$$\ell(c) \geq \frac{3\epsilon_0}{4} \geq d(z, t).$$

Ceci termine la preuve du fait que π est une isométrie locale.

Étape 2 : d est une distance.

Étape 3 : S_ϕ est une surface hyperbolique.

13.3 Hexagones droits et pantalons

Chapter 14

Constructions par quotient

14.1 Groupes agissant proprement discontinuellement sans point fixe

Les définitions suivantes sont importantes.

Définition 14.1.1. Soit Γ un sous-groupe de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$.

1. On dit que Γ agit proprement discontinuellement si tout point x de $\mathbb{H}^2$, il existe un réel r strictement positif tel que

$$\#\{g \in \Gamma \mid d(x, gx) < r\} < \infty.$$

2. On dit que Γ agit sans point fixe si tout point x de $\mathbb{H}^2$,

$$\text{Stab}(x) := \{g \in \Gamma \mid x = gx\} = \text{Id}.$$

EXERCICE : Montrez que le sous-groupe Γ de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ agit proprement discontinuellement sans point fixe si et seulement si pour tout point x de $\mathbb{H}^2$, il existe un réel r strictement positif tel que

$$\{g \in \Gamma \mid d(x, gx) < r\} = \text{Id}.$$

14.1.1 La surface hyperbolique quotient

Notre principal résultat est le suivant

Théorème 20. Soit Γ un sous-groupe de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ agissant proprement discontinuellement sans point fixes sur $\mathbb{H}^2$. Alors, il existe une structure de surface hyperbolique sur $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$, pour laquelle la projection de

$$p : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^2,$$

est une isométrie locale.

Nous considérons le temps de cette preuve les éléments de $X := \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ comme des sous ensembles de $\mathbb{H}^2$.

Le théorème suit de la proposition suivante

Proposition 14.1.2. Soit $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d(x, y) = \inf\{d(z, t) \mid p(z) = x, p(t) = y\}.$$

Alors,

1. la fonction d est une distance,
2. pour tout x de $\mathbb{H}^2$, il existe ϵ strictement positif tel que p est une bijection préservant les distances de $B(x, \epsilon)$ dans $B(p(x), \epsilon)$.

DÉMONSTRATION : d EST UNE DISTANCE: Clairement, d est symétrique et il est facile de vérifier l'inégalité triangulaire. Pour montrer que $d(x, y) = 0$ implique $x = y$. Si $d(x, y) = 0$, soit z et t tels que $p(z) = x$ et $p(t) = y$. Il existe donc des suites d'éléments $\{\gamma_i, \eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tels que

$$d(\gamma_i z, \eta_i t) \rightarrow 0.$$

En posant $\beta_i = \eta_i^{-1} \cdot \gamma_i$, on a

$$d(\beta_i z, t) \rightarrow 0. \quad (14.1)$$

Soit alors $r > 0$, obtenu par la définition de groupe agissant proprement discontinument sans point fixe, tel que

$$\{g \in \Gamma \mid d(x, gx) < r\} = \text{Id}.$$

Or, il existe i_0 tel que $i \geq i_0$ entraîne

$$d(\beta_i z, t) < r/2,$$

donc $i, j > i_0$,

$$d(\beta_j^{-1} \cdot \beta_i z, z) = d(\beta_i z, \beta_j z) < r.$$

Dès lors $\beta_j^{-1} = \beta_i^{-1} = \beta_{i_0}^{-1}$. Nous déduisons de (14.1) que $t = \beta_{i_0} z$. Ainsi $x = p(z) = p(t) = y$.

p EST UNE ISOMÉTRIE LOCALE: Soit x un point de $\mathbb{H}^2$ et r tel que

$$\{g \in \Gamma \mid d(x, gx) < r\} = \text{Id}.$$

Nous allons montrer que p est une isométrie locale de $B(x, r/4)$ sur son image. Soit en effet z et t appartenant à $B(x, r/4)$. Il est clair que

$$d(p(z), p(z)) \leq d(t, z).$$

Démontrons l'inégalité inverse. Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$d(p(t), p(z)) < d(t, z).$$

Nous en déduisons qu'il existe γ et η dans Γ tel que

$$d(\gamma z, \eta t) < d(t, z). \quad (14.2)$$

En particulier,

$$\begin{aligned} d(x, \eta^{-1}\gamma x) &\leq d(x, t) + d(t, \eta^{-1}\gamma z) + d(\eta^{-1}\gamma z, \eta^{-1}\gamma x) \\ &\leq d(x, t) + d(t, \eta^{-1}\gamma z) + d(z, x) \\ &\leq d(x, t) + d(t, z) + d(z, x) \\ &< 2d(x, t) + 2d(z, t) < r. \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que $\eta^{-1}\gamma = \text{Id}$ et donc $\eta = \gamma$. En particulier,

$$d(\gamma z, \eta t) = d(t, z),$$

ce qui contredit (14.2).

Pour conclure, il suffit de montrer que p est surjective de $B(x, r)$ dans $B(p(x), r)$. Or nous savons que $p(B(x, r)) \subset B(p(x), r)$. Si maintenant $d(p(y), p(x)) < r$, alors il existe γ dans Γ tel que $d(\gamma \cdot y, x) < r$. Ainsi $p(y) = p(\gamma \cdot y) \in B(x, r)$ et donc $B(p(x), r) \subset p(B(x, r))$.

14.2 Sous-groupes discrets de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$

14.2.1 Sous-groupe discrets et sans torsion

Nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème 21. *Un sous-groupe Γ de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ agit proprement discontinument sur $\mathbb{H}^2$ si et seulement si il est discret.*

Un sous-groupe Γ de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ agit proprement discontinument sans point fixe sur $\mathbb{H}^2$ si et seulement si il est discret et sans torsion.

Nous allons définir les termes de ce théorème puis le démontrer.

Sous-groupes discrets

Notons $\text{SL}^\pm(2, \mathbb{R})$ le groupe des matrices de déterminant ± 1 . Rappelons que le choix d'un modèle du demi-plan de Poincaré, donne naissance à un homomorphisme surjectif

$$\pi : \text{SL}^\pm(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{H}^2),$$

dont le noyau est le groupe $\{+\text{Id}, -\text{Id}\}$. Le morphisme est donné si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

par

$$\pi(A).z = \frac{az + b}{cz + d},$$

si $\det(A) = 1$ et

$$\pi(A).z = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

si $\det(A) = -1$. Pour simplifier les notations si $A \in \text{SL}^\pm(2, \mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}^2$ nous écrirons $A.z$ plutôt que $\pi(A).z$.

Rappelons enfin qu'un ensemble X d'un espace topologique Y est *discret* si pour tout x de X , il existe un ouvert U de Y tel que

$$U \cap X = \{x\}.$$

Définition 14.2.1. Nous dirons qu'un sous-groupe Γ de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ est discret si $\pi^{-1}(\Gamma)$ est un sous-groupe discret de $\text{SL}^\pm(2, \mathbb{R})$.

Voici quelques propriétés importantes des sous-groupes discrets de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$

Lemme 14.2.2. Soit Γ un sous-groupe de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$

1. Si Γ est discret, toute suite convergente formée d'éléments de Γ est constante à partir d'un certain rang.
2. Si Γ est discret, Γ est fermé.
3. Le sous-groupe Γ est discret si et seulement si il existe un voisinage U de Id dans $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ tel que $U \cap \gamma = \{\text{Id}\}$.
4. Si Γ est discret, alors tout sous-groupe de Γ est discret. Réciproquement, si Γ admet un sous-groupe discret d'indice fini, alors Γ est discret.

DÉMONSTRATION : Pour (1), soit $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. On suppose que cette suite converge vers g_0 . Comme Γ est discret, il existe un ouvert U de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ tel que $U \cap \Gamma = \{\text{Id}\}$. On sait que $\{\gamma_n g_0^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Id . Pour j suffisamment grand $\gamma_j g_0^{-1}$ appartient à U . Comme de plus la suite $\{\gamma_j \gamma_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\gamma_j g_0^{-1}$, nous en déduisons que pour i suffisamment grand $\gamma_j \gamma_i^{-1}$ appartient à U et donc $\gamma_j = \gamma_i$ à partir d'un certain rang.

L'assertion (2) est une conséquence immédiate de (1). Si enfin U est comme dans (3), alors pour tout g de Γ , $g.U$ est un voisinage ouvert de g tel que $g.U \cap \Gamma = \{g\}$. En particulier Γ est discret.

Nous laissons la dernière propriété en exercice.

REMARQUES : La proposition n'utilise que les propriétés suivantes du groupe $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ vu comme espace topologique

1. l'application inverse $g \mapsto g^{-1}$ de G dans G est continue,
2. le produit $(g, u) \mapsto g.u$ de $G \times G$ dans G est continu.

En général, un groupe G muni d'une topologie vérifiant ces deux propriétés est appelé *groupe topologique*. La proposition est vraie dans le cadre général d'un sous-groupe discret d'un groupe topologique.

Proposition 14.2.3. Le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ image des matrices à coefficients entiers de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ est un sous-groupe discret de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$.

DÉMONSTRATION : En effet, lorsque l'on réalise les matrices comme des éléments de $\mathbb{R}^4$, on a

$$\text{SL}(2, \mathbb{Z}) = \text{SL}(2, \mathbb{R}) \cap \mathbb{Z}^4.$$

Le sous-ensemble $\mathbb{Z}^4$ étant discret, un sous-ensemble d'un ensemble discret étant discret, $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ est discret.

Éléments de torsion

- Définition 14.2.4.** 1. Un élément g de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ différent de l'identité est de torsion s'il existe $n > 0$ tel que $g^n = \text{Id}$.
2. Un sous-groupe Γ de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ est sans torsion s'il n'a pas d'élément de torsion.

EXERCICE : Montrez que si $g^2 = \text{Id}$ et g renverse l'orientation, alors g est une symétrie axiale. Montrez que si g est de torsion et conserve l'orientation alors g est elliptique. En déduire que si Γ contient un élément de torsion, alors il contient un élément non trivial ayant un point fixe.

Voici une première construction de groupe sans torsion :

Proposition 14.2.5. Soit p un entier naturel premier et Γ_p , le noyau de l'application naturelle de $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ dans $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Alors, pour $p > 3$, le groupe Γ_p est sans torsion.

DÉMONSTRATION : Comme un élément de torsion A de Γ_p est elliptique sa trace est plus petite que 2. Comme elle est entière elle vaut 1, -1 ou 0. Mais par ailleurs cette trace est congrue à 2 modulo p , ce qui est impossible si $p > 3$.

Un lemme important d'Atle Selberg généralise ce dernier résultat. Sa démonstration dépasse le cadre de ce cours. Nous n'utiliserons pas ce lemme.

Lemme 14.2.6. [SELBERG] Tout sous-groupe de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ engendré par un nombre fini d'éléments admet un sous-groupe d'indice fini sans torsion.

Un premier lemme

Nous avons besoin d'un lemme

Lemme 14.2.7. Soit x un point du demi-plan de Poincaré et ϵ un réel strictement positif. Alors l'ensemble

$$K_x(\epsilon) = \{g \in \text{SL}^\pm(2, \mathbb{R}) \mid d(x, g(x)) \leq \epsilon\},$$

est compact.

DÉMONSTRATION : Si ϕ est un élément de $\text{SL}^\pm(2, \mathbb{R})$, on a

$$K_{\phi(x)}(\epsilon) = \phi^{-1}K_x(\epsilon)\phi.$$

Il suffit donc de démontrer que K_i est compact. Comme cet ensemble est fermé, il suffit de démontrer qu'il est borné. Or remarquons que pour tout r , il existe k_0 , k_1 et k_2 strictement positifs tel que

$$B(i, \epsilon) \subset \{x + iy \mid k_1 > y > k_0, |x| < k_2\}$$

Supposons tout d'abord que $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, alors

$$A(i) = \frac{(ai + b)(d - ci)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{i}{c^2 + d^2}.$$

Dès lors, si $A(i) \in B(i, \epsilon)$, alors $k_1 > \mathfrak{I}(A(i)) > k_0$ et donc

$$\begin{aligned} c &< 1/\sqrt{k_0} \\ d &< 1/\sqrt{k_0} \\ c^2 + d^2 &> 1/k_1. \end{aligned}$$

Comme $|\Re(A(i))| < k_2$, il vient $|ac + bd| < k_2/k_1$; en utilisant $ac - bd = 1$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{k_2 + k_1}{k_1 \sqrt{k_0}} &\geq |c||ac + bd| + |d||ad - bc| \\ &\geq |ac^2 + bdc + ad^2 - bdc| = |a||c^2 + d^2| \\ &\geq \frac{a}{k_1}. \end{aligned}$$

Nous venons donc de montrer que $a \leq (k_2 + k_1)/\sqrt{k_0}$. Un raisonnement analogue montre que $b \leq (k_2 + k_1)/\sqrt{k_0}$. Nous venons de montrer que pour tout ϵ , il existe K tel que $A(i)$ élément de $B(i, \epsilon)$, alors

$$\sup(|a|, |b|, |c|, |d|) \leq K.$$

En particulier, l'ensemble $K_i(\epsilon) \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est borné et donc compact. Un raisonnement analogue pour les isométries renversant l'orientation montre que $K_i(\epsilon)$ est compact.

Démonstration du théorème

Nous voulons montrer la première partie du théorème.

Proposition 14.2.8. *Un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$ agit proprement discontinument sur $\mathbb{H}^2$.*

Si, de plus, il est sans torsion, il agit sans point fixes.

DÉMONSTRATION : Soit $x \in \mathbb{H}^2$. Nous allons montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\#\{g \in \Gamma \mid d(x, gx) < r\} < \infty.$$

Raisonnons par l'absurde. Dans le cas contraire il existe une suite infinie g_i d'éléments de Γ tous distincts tels que la suite $\{g_i \cdot x\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers x . Soit $\tilde{g}_i$ des relevés de g_i dans $\mathrm{SL}^\pm(2, \mathbb{R})$.

D'après le lemme 14.2.7, la suite $\{\tilde{g}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans un compact. Nous pouvons donc extraire une sous-suite convergente vers g_0 tels que $g_0(x) = x$. Cette suite étant constante à partir d'un certain rang d'après le lemme 14.2.2 nous obtenons la contradiction.

Supposons de plus que Γ est sans torsion, raisonnons à nouveau par l'absurde et supposons qu'il existe g dans Γ et $x \in \mathbb{H}^2$ tel que $gx = x$. Dès lors, pour tout n , $g^n \cdot x = x$, le groupe $\{g^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est fini, ce qui implique que g est un élément de torsion et la contradiction.

Nous démontrons la deuxième partie du théorème,

Proposition 14.2.9. *Un sous-groupe Γ de $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$ qui agit proprement discontinument sur $\mathbb{H}^2$ est discret, si de plus il n'a pas de point fixe il est sans torsion.*

DÉMONSTRATION : Supposons que Γ n'est pas discret, alors il existe une suite d'éléments $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de Γ qui converge vers Id . Mais alors pour tout x de $\mathbb{H}^2$, la suite $\{g_i \cdot x\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers x et la contradiction. De même, si g_0 vérifie $g_0^n = \mathrm{Id}$, alors g_0 est un élément elliptique et fixe donc un point x de $\mathbb{H}^2$, ce qui donne à nouveau une contradiction.

14.3 Quotient et pavages

14.3.1 Domaine fondamental

Commençons par une définition généralisant celle de polygone convexe.

Définition 14.3.1. Une famille de géodésiques $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ est localement finie si pour tout x de $\mathbb{H}^2$, pour tout $R > 0$

$$\#\{i \in I \mid \gamma_i \cap B(x, R) \neq \emptyset\} < \infty.$$

Un polygone convexe infini est une composant connexe du complémentaire d'une famille localement finie de géodésiques.

REMARQUES :

1. De la même manière que pour les polygones convexes, un polygone convexe infini est une intersection de demi plan.
2. Par construction, si P est un polygone convexe, pour tout x et R il existe un polygone convexe Q tel que

$$B(x, R) \cap P = B(x, r) \cap Q.$$
3. Les propriétés "locales" des polygones convexes restent vraies pour les polygones convexes infini.

Définition 14.3.2. Si Γ est un sous-groupe de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$, un domaine fondamental de Γ est un polygone convexe infini P tel que

- Pour tout γ de Γ différent de l'identité, $\gamma P \cap P = \emptyset$.
- De plus $\mathbb{H}^2 = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot \bar{P}$.

Autrement dit, le plan hyperbolique est pavé par les images de P par Γ .
Nous avons alors

Théorème 22. Tout sous-groupe discret sans torsion Γ admet un domaine fondamental. De plus, si $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ est compact, alors Γ admet un domaine fondamental qui est un polygone convexe borné. Réciproquement, si Γ admet un domaine fondamental, alors Γ est discret.

La première partie du théorème découle du lemme suivant

Lemme 14.3.3. Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion. Soit x un point de $\mathbb{H}^2$. Soit

$$\Delta_x = \{y \in \mathbb{H}^2 \mid \forall g \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}, d(x, y) < d(g.x, y)\}.$$

Alors, Δ_x est un polygone convexe infini et un domaine fondamental pour l'action de Γ

DÉMONSTRATION :

14.4 Des exemples de groupes discrets

Nous allons donner des exemples de groupes et de surfaces hyperboliques quotients. Nous ne donnerons pas les démonstrations. Les deux premiers cas sont des exercices faciles.

A chaque fois, un domaine fondamental est construit.

14.4.1 Groupes élémentaires

Une isométrie hyperbolique et son tube

Nous considérons une translation hyperbolique τ . Alors le groupe $\Gamma = \{\tau^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est discret et sans torsion. De plus

- soit γ l'axe de τ et $x \in \gamma$,
- soit γ_0 la géodésique orthogonale à γ passant par x ;
- soit P le polygone bordé par γ_0 et $\tau(\gamma_0)$,

Alors la *tube hyperbolique* $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ est la surface obtenue à partir de P en recollant γ_0 et $\tau(\gamma_0)$ par τ .

Le polygone P est le domaine fondamental de Γ

Une isométrie parabolique et sa pointe

Nous considérons une transformation parabolique τ . Alors le groupe $\Gamma = \{\tau^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est discret et sans torsion. De plus

- soit x le point fixe à l'infini de τ ,
- soit γ_0 une géodésique orthogonale passant par x ,
- soit P le polygone bordé par γ_0 et $\tau(\gamma_0)$,

Alors la *pointe hyperbolique* $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ est la surface obtenue à partir de P en recollant γ_0 et $\tau(\gamma_0)$ par τ .

A nouveau, le polygone P est le domaine fondamental de Γ

14.4.2 Groupes engendrés par des réflexions

Polygones à angles droits

Le théorème suivant est utile pour construire des sous-groupe discrets.

Théorème 23. *Soit P un polygone à angles droits. Soit Γ_P le groupe engendré par les symétries axiales par rapport aux côtés de ce polygone. Alors Γ est un groupe discret dont P est un domaine fondamental.*

Un nouveau point de vue sur les pantalons

Soit γ_1 et γ_2 et γ_3 des géodésiques disjointes. Soit σ_i les translations hyperboliques tels que $\sigma_i(\gamma_{i+1}) = \gamma_{i+2}$. Soit Γ le groupe engendré par σ_1, σ_2 et σ_3 . Soit P le polygone bordé par les trois géodésiques γ_1 et γ_2 et γ_3 .

Théorème 24. *Le groupe Γ est un sous-groupe discret. De plus $\Gamma \backslash \text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ contient une image isométrique d'un pantalon. Enfin, P est un domaine fondamental pour Γ*

DÉMONSTRATION : Soit Γ_P le groupe engendré par les réflexions sur les côtés de P , et $\Gamma_0 = \Gamma \cap \Gamma_P$. On montre que Γ_0 est d'indice 2 dans Γ et donc que Γ est discret.

14.4.3 Groupes de triangles

Voici un autre exemple de construction que nous admettrons sans démonstration.

Théorème 25. *Soit p, q, r des entiers positifs tels que $1/p + 1/q + 1/r < 1$. Soit T le triangle d'angles aux sommets $\pi/p, \pi/q$ et π/r alors le groupe de triangle $\mathcal{T}(p, q, r)$ engendré par les trois symétries d'axe les côtés de ce triangle est un sous-groupe discret.*

Chapter 15

Les applications à valeurs dans dans le cercle

15.1 Motivation

Question 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t \mapsto c(t)$, $I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ une courbe continue dans le plan qui évite l'origine. On note $r(t) \in]0, +\infty[$, $\tilde{\theta}(t) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ses coordonnées polaires. Peut-on choisir une fonction continue $t \mapsto \theta(t)$, $I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\theta(t) \in \tilde{\theta}(t)$ pour tout t ?

Question 2. Supposons que $I = \mathbb{R}$ et que c est 2π -périodique. Peut-on choisir la fonction continue $t \mapsto \theta(t)$ 2π -périodique ?

Question 3. La fonction holomorphe $z \mapsto 1/z$, $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Rappel : détermination principale du logarithme

Définition 15.1.1. La détermination principale du logarithme est la fonction holomorphe Log définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, qui vaut 0 en 1 et dont la dérivée est $z \mapsto 1/z$.

On la calcule en intégrant $1/z$ le long d'arcs évitant $\mathbb{R}_-$. On trouve que si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors

$$\text{Log}(z) = \log(r) + i\theta.$$

Le fait que les limites par le haut et par le bas de Log en un point de $\mathbb{R}_-$ sont distinctes entraîne que $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Donc la réponse à la question 3 est négative.

Cela entraîne que la réponse à la question 2 est négative elle-aussi.

EXEMPLE : Soit $c(t) = e^{it} \in \mathbb{C}$, qu'on identifie à $\mathbb{R}^2$. Alors $r(t) = 1$ pour tout t et il n'existe pas de fonction continue 2π -périodique $t \mapsto \theta(t)$ telle que $c(t) = e^{i\theta(t)}$.

En effet, sinon, la formule $\text{my} - \log(re^{it}) = \log(r) + i\theta(t)$ définirait une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $e^{\text{my} - \log(z)} = z$. Le théorème d'inversion locale, appliqué à la fonction exponentielle, entraînerait que $\text{my} - \log$ est holomorphe, de dérivée $1/z$, contradiction.

15.2 Le théorème de relèvement

Théorème 26. On note $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$. Soit $t \mapsto u(t)$, $I \rightarrow U$ une application continue. Soit θ_0 un réel tel que $e^{i\theta_0} = u(t_0)$. Il existe une unique fonction continue $t \mapsto \theta(t)$, $I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $e^{i\theta(t)} = u(t)$ pour tout $t \in I$ et $\theta(t_0) = \theta_0$.

DÉMONSTRATION : L'unicité est facile : deux solutions diffèrent d'une fonction continue à valeur dans $2\pi\mathbb{Z}$, nécessairement constante, en fait nulle puisqu'elle s'annule en t_0 .

Supposons d'abord qu'il existe un point $v \in U$ qui n'est pas dans l'image de u . Si $v = -1$, posons $\theta_v(t) = -i\text{Log}(u(t))$. Si $v \neq -1$, posons $\theta_v(t) = -i\text{Log}(-u(t)/v) - i\text{Log}(v) - i\pi$. Dans les deux cas, $e^{i\theta_v(t)} = u(t)$ pour tout $t \in I$. En particulier, $e^{i\theta_v(t_0)} = u(t_0)$, donc il suffit d'ajouter un multiple entier de 2π à θ_v pour que $\theta(t_0) = \theta_0$.

Passons au cas général. Soit $T = \sup\{s \in I \mid \text{il existe une solution définie sur } [t_0, s]\}$ (éventuellement, $T = +\infty$). Supposons que $T \in I$. Soit $v \in U$ un point distinct de $u(T)$. Par continuité de u , il existe $\epsilon > 0$ tel que u ne prenne pas la valeur v sur $]T - \epsilon, T + \epsilon[\cap I$. Par définition de T , il existe un $t > T - \epsilon$ et une solution θ_s définie sur $[t_0, s]$. Alors $e^{i\theta_s(s)} = u(s) = e^{i\theta_v(s)}$, donc il existe un entier n tel que $\theta_s(s) - \theta_v(s) = 2\pi n$. On prolonge θ_s par continuité en posant $\theta(t) = \theta_v(s) + 2\pi n$ pour $t \in [s, T + \epsilon[\cap I$. On obtient une solution définie sur $[t_0, T + \epsilon[\cap I$. Ceci contredit le choix de T . On conclut que $T \notin I$, donc la moitié du contrat est remplie. En faisant le même travail à gauche de t_0 , on construit le relèvement souhaité sur I entier. $\square$

Moralité. On a utilisé la propriété suivante de la paramétrisation exponentielle $\mathbb{R} \rightarrow U$ du cercle unité : au voisinage de chaque point de U , on dispose d'une famille d'applications réciproques continues dont les images recouvrent l'image réciproque du voisinage. Cette propriété caractérise les revêtements, on y reviendra.

15.3 Degré

Retour à la question 2. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow U$ une application 2π -périodique. Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un relèvement de u . Alors $t \mapsto \theta(t + 2\pi)$ est un autre relèvement de u , donc il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2\pi n$. L'exemple de la paramétrisation exponentielle elle-même ($\theta(t) = t$) montre que n n'est pas toujours nul.

Définition 15.3.1. Soit $f : U \rightarrow U$ une application continue, soit θ un relèvement de $t \mapsto f(e^{it})$. On appelle degré de f l'entier $n = \deg(f)$ tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2\pi n$.

EXEMPLE : Le degré de $z \mapsto z^n$ est n .

Proposition 15.3.2. Si deux applications f et $g : U \rightarrow U$ sont telles que pour tout s , $|f(s) - g(s)|$ est strictement plus petit que 2, elles ont même degré.

DÉMONSTRATION : Supposons que $|f - g| < 2$. Soit $\theta_f, \theta_g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des relèvements de f et g . On peut les choisir de sorte que $|\theta_f(0) - \theta_g(0)| < \pi$. Supposons que $s = \inf\{t >$

$0 \mid |\theta_f(t) - \theta_g(t)| \geq \pi$ est fini. Alors $|\theta_f(s) - \theta_g(s)| = \pi$, ce qui contredit $|f(s) - g(s)| < 2$. Par conséquent, pour tout $t > 0$, $|\theta_f(t) - \theta_g(t)| < \pi$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 2k\pi|\deg(f) - \deg(g)| - |\theta_f(0) - \theta_g(0)| &\leq |\theta_f(0) - \theta_g(0) + 2k\pi(\deg(f) - \deg(g))| \\ &\leq |\theta_f(2k\pi) - \theta_g(2k\pi)| < \pi, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\deg(f) = \deg(g)$. □

Chapter 16

Groupe fondamental

16.1 Chemins et lacets

16.1.1 Définitions

Définition 16.1.1. Soit X un espace topologique. Un chemin dans X est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$, on parle de lacet, basé au point $x = \gamma(0) = \gamma(1)$.

Dans le cas où X est le cercle U , on définit le degré du lacet α par la formule

$$\deg(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\eta(1) - \eta(0)),$$

où $\alpha = e^{i\eta}$. On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de η .

16.1.2 Composition et inverse

Définition 16.1.2. [COMPOSITION] Si $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ sont des chemins tels que $\beta(0) = \alpha(1)$, leur composition est le chemin noté $\alpha \cdot \beta$ tel que

$$\begin{cases} \alpha \cdot \beta(t) = \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \alpha \cdot \beta(t) = \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Proposition 16.1.3. Si $X = U$ alors $\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$.

DÉMONSTRATION : En effet supposons $\alpha = e^{i\theta}$ et $\beta = e^{i\eta}$ tels que $\theta(1) = \eta(0)$. Nous pouvons alors écrire $\alpha \cdot \beta = e^{i\xi}$ où

$$\begin{cases} \xi(t) = \theta(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \xi(t) = \eta(2t - 1) + \deg(\alpha)2\pi & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

On vérifie que ξ est continue et que $\xi(1) - \xi(0) = 2\pi(\deg(\alpha) + \deg(\beta))$.

Définition 16.1.4. [INVERSE] L'inverse d'un chemin α , noté α^{-1} , est défini par

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t).$$

EXERCICE : Si $X = U$ alors $\deg(\alpha^{-1}) = -\deg(\alpha)$.

16.2 Homotopie

Deux chemins sont homotopes si on peut les déformer continûment l'un en l'autre.

Définition 16.2.1. Soit $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ des chemins de mêmes extrémités x_0 et x_1 . On dit que α et β sont homotopes (à extrémités fixées), et on note $\alpha \sim \beta$, s'il existe une application continue $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ – appelée homotopie – telle que

$$\begin{aligned} F(0, t) &= \alpha(t), \\ F(1, t) &= \beta(t), \\ F(s, 0) &= x_0, \quad F(s, 1) = x_1. \end{aligned}$$

Notre premier lemme explique que deux paramétrisations différentes donne deux chemins homotopes.

Lemme 16.2.2. Soit α et β deux chemins. On suppose qu'il existe une application continue h de $[0, 1]$ dans lui-même tel que $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$ et $\alpha = \beta \circ h$. Alors α et β sont homotopes.

16.2.1 Exemples d'homotopie

Voici deux exemples concernant des espaces topologiques particuliers.

Proposition 16.2.3. Si X est un convexe d'un espace affine, alors deux chemins quelconques ayant les mêmes extrémités sont homotopes.

Proposition 16.2.4. Soit α un chemin et h une application continue de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$ alors $\alpha \circ h$ est homotope à α .

Proposition 16.2.5. Si $X = U$, deux lacets sont homotopes si et seulement si ils ont le même degré.

DÉMONSTRATION : Supposons tout d'abord que α et β sont homotopes par une application H . Par définition pour tout s , l'application $H_s : t \rightarrow H(s, t)$ est un lacet. Par uniforme continuité de H , il existe $\epsilon > 0$ tel que $|s - s'| \leq \epsilon$ entraîne $|H_s(t) - H_{s'}(t)| \leq 1$. En particulier, d'après la proposition 21.3.2, $\deg(H_s) = \deg(H_{s'})$. La fonction $s \rightarrow \deg(H_s)$ est localement constante donc constante. En particulier $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$.

Réciproquement, supposons $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$. Nous pouvons écrire $\alpha = e^{i\theta}$ et $\beta = e^{i\eta}$ tels que $\theta(0) = \eta(0)$. Puisque $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$, nous avons également $\theta(1) = \eta(1)$. Nous pouvons alors définir une homotopie entre α et β par

$$H(s, t) = e^{i((1-s)\theta(t) + s\eta(t))}.$$

16.3 Simple connexité

Définition 16.3.1. On dit qu'un espace topologique X est simplement connexe si il est connexe et si tout lacet est homotope à un lacet constant.

16.3.1 Premiers exemples

Comme premier exemple, nous avons

Proposition 16.3.2. *Si X est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, alors X est simplement connexe.*

Proposition 16.3.3. *Si X est un ensemble géodésiquement convexe de $\mathbb{H}^2$, alors X est simplement connexe.*

Proposition 16.3.4. *Le cercle U n'est pas simplement connexe.*

16.4 Propriétés de l'homotopie et groupe fondamental

16.4.1 Propriétés fondamentales

Par la suite il ne sera pas toujours utile de construire explicitement les homotopies. Les propriétés suivantes nous permettront de montrer l'homotopie de nombreux chemins

Proposition 16.4.1. *Si x_0 est un point de X , on note par x_0 le chemin constant égale à x_0*

- (i) *Si α est homotope à β , alors β est homotope à α .*
- (ii) *Si α est homotope à β et β à γ , alors α est homotope à γ .*
- (iii) *Si α est homotope à α' et β à β' , alors $\alpha.\beta$ est homotope à $\alpha'.\beta'$.*
- (iv) *Le chemin α est homotope à $\alpha.\alpha(1)$ et à $\alpha(0).\alpha$.*
- (v) *Le lacet $\alpha.\alpha^{-1}$ est homotope à $\alpha(0)$.*
- (vi) *Le chemin $(\alpha.\beta).\gamma$ est homotope à $\alpha.(\beta.\gamma)$.*

DÉMONSTRATION : Pour les propriétés (iv,v,vi), on utilisera avec profit la proposition 22.2.4.

Nous en déduisons immédiatement

Corollaire 16.4.2. *Etre homotope est une relation d'équivalence.*

16.4.2 Le groupe fondamental

Nous déduisons immédiatement des propriétés prouvées dans la proposition 22.4.1.

Théorème 27. *Soit $x \in X$. Soit $\pi_1(X, x)$ l'ensemble des classes d'homotopie (à extrémités fixées) de lacets basés en x . La composition des lacets induit sur $\pi_1(X, x)$ une structure de groupe.*

Définition 16.4.3. *On appelle $\pi_1(X, x)$ le groupe fondamental de X .*

On note quelquefois $\Omega_x(X)$ l'ensemble des lacets de X basés en x de telle sorte que

$$\pi_1(X, x) = \Omega_x(X) / \sim .$$

16.4.3 Exemples

Nous pouvons énoncer de manière plus savante nos diverses remarques sur le degré des lacets dans le cercle.

Proposition 16.4.4. *Le groupe fondamental du cercle unité $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}$. L'isomorphisme est donné par le degré $\deg : \pi_1(U, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$.*

Proposition 16.4.5. *Soit S^n la sphère de dimension n . Si $n \geq 2$, alors S^n est simplement connexe.*

DÉMONSTRATION : Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^n$ un lacet. Nous appellerons *cercle* l'intersection d'un plan de dimension deux avec la sphère.

PREMIER CAS. Supposons que γ évite au moins un point $u \in S^n$. Comme $S^n \setminus \{u\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, γ est homotope à une constante dans $S^n \setminus \{u\}$, et *a fortiori* dans S^n . Plus généralement, le même raisonnement montre que tout chemin évitant un point est homotope à un chemin tracé sur un cercle.

CAS GÉNÉRAL. Pour se ramener au premier cas, on montre que γ est homotope à un lacet qui évite un point. Par continuité uniforme, il existe un entier N tel que si $|t' - t| \leq 1/N$, alors $|\gamma(t') - \gamma(t)| < 1$. En particulier, le chemin γ_i qui est la restriction de γ à l'intervalle $[i/N, (i+1)/N]$ évite le point $-\gamma(t_i)$. Le chemin γ_i est donc homotope à un chemin tracé sur un cercle. Le chemin γ est alors lui aussi homotope à un chemin tracé sur une réunion finie de cercles. Si $n \leq 2$ alors. Cette réunion finie de cercles évite un point.

Proposition 16.4.6. *Soit X, Y des espaces topologiques, $x \in X, y \in Y$. Alors*

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) = \pi_1(X, x) \oplus \pi_1(Y, y).$$

En particulier, le groupe fondamental du tore $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est $\mathbb{Z}^n$.

DÉMONSTRATION : Un lacet basé en (x, y) dans $X \times Y$, c'est un couple d'un lacet de X basé en x et d'un lacet de Y basé en y . Les homotopies aussi sont des couples d'homotopies, donc les classes d'homotopie sont des couples de classes.

Enfin, $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = (\mathbb{R} / \mathbb{Z})^n$.

16.5 Changement de points base et applications

Les théorèmes suivants résument quelques constructions supplémentaires.

16.5.1 Chemins et changements de points base

Théorème 28. *Soit c un chemin joignant x à y , alors l'application $\alpha \mapsto c^{-1} \cdot \alpha \cdot c$ de $\Omega_x(X)$ dans $\Omega_y(X)$ donne naissance à un isomorphisme de groupe $c_* : [\alpha] \mapsto [c^{-1} \cdot \alpha \cdot c]$ de $\pi_1(X, x)$ dans $\pi_1(X, y)$. De plus si c joint x à y et c' joint y à z alors $(c \cdot c')_* = c_* \circ c'_*$.*

16.5.2 Applications entre espaces

Théorème 29. Soit f une application continue de X dans Y alors l'application $\alpha \mapsto f \circ \alpha$ de $\Omega_x(X)$ dans $\Omega_{f(x)}(Y)$ donne naissance à un morphisme de groupe $f_* : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$, de $\pi_1(X, x)$ dans $\pi_1(Y, f(x))$.

1. de plus $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$,
2. si f et g sont homotopes par H alors $g_* = c_* \circ f_*$, où c est le chemin $t \mapsto H(t, x)$.

16.6 Surfaces hyperboliques simplement connexes

Notre résultat principal est le suivant

Théorème 30. Soit S une surface hyperbolique simplement connexe complète alors il existe une isométrie locale p de S dans $\mathbb{H}^2$.

Si de plus S est complète alors S est une isométrie de S sur un polygone hyperbolique à angle droit localement fini du plan hyperbolique.

16.6.1 Isométries et chemins de boules

Définition 16.6.1. Soit x et y deux points d'une surface hyperbolique S . Un chemin de boules de x à y est une famille finie de boules $\{B_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ où les B_i sont des boules de S isométriques à des boules de l'espace modèle telles que

- La boule B_1 contient x , la boule B_n contient y ,
- $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$,
- Pour tout i , il existe une boule $\tilde{B}_i$ isométrique à une boule hyperbolique et tel que alors $B_j \subset \tilde{B}_i$ où $j \in \{i-1, i, i+1\}$,

Les boules B_1 et B_n sont respectivement appelées boules initiales et boules finales.

Nous dirons qu'une courbe $c : [0, 1] \rightarrow S$ est couverte par un chemin de boules $\{(B_i, \tilde{B}_i)\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ si il existe une subdivision $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_n = 1$ telle que $c[t_i, t_{i+1}] \subset B_i$

Nous remarquons que toute courbe est couverte par un chemin de boules: il suffit de trouver un $\epsilon > 0$ tel que la boule $B(c(t), \epsilon)$ est isométrique avec une boule de l'espace hyperbolique pour tout t , puis de considérer N tel que $|t-s| \leq 1/N$ implique $d(c(t), c(s)) \leq \epsilon/4$. Alors $\{B(c(i/N), \epsilon/4), B(c(i/N), \epsilon)\}$ est un chemin de boules qui recouvre c .

Réciproquement tout chemin de boules recouvre un chemin.

La propriété utile est la suivante

Proposition 16.6.2. Soit $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ un chemin de boule. Soit f_1 une isométrie de $\tilde{B}_1$ dans l'espace modèle. Il existe alors une unique suite d'isométries f_i de $\tilde{B}_i$ dans l'espace modèle, telle que si $|i-j| < 2$

$$f_i|_{B_j} = f_j|_{B_j}.$$

L'isométrie f_n est l'isométrie finale déterminée par f_1 et le chemin de boule $\mathcal{B}$.

DÉMONSTRATION : Cette proposition repose sur les deux remarques suivantes :

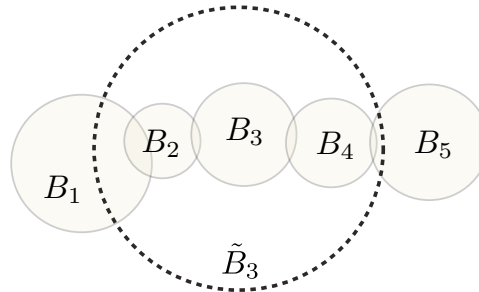


Figure 16.1: Un chemin de boules

1. Soit ϕ et ψ deux isométries d'une boule b dans $\mathbb{H}^2$, alors il existe une unique isométrie F de $\mathbb{H}^2$ telle que $\phi = F \circ \psi$.
2. Soit B une boule de S isométrique à une boule de $\mathbb{H}^2$, soit $b \subset B$ une autre boule et ϕ une isométrie de b dans $\mathbb{H}^2$. Il existe alors une unique isométrie ψ de B dans $\mathbb{H}^2$ telle que $\phi = \psi|_b$.

Nous en déduisons de (1) l'unicité de la suite f_i . On construit cette suite par récurrence de la manière suivante. Soit f_i l'isométrie de B_i dans $\mathbb{H}^2$. Par (2), il existe une isométrie g_i de $\tilde{B}_i$ dans $\mathbb{H}^2$ telle que $g_i|_{B_i} = f_i$. On pose alors $f_{i+1} = g_i|_{B_{i+1}}$.

16.6.2 Chemin de boules homotopes

Définition 16.6.3. Nous dirons que le chemin de boule $\mathcal{B}$ est une restriction du chemin de boules $\mathcal{B}'$ si les boules définissant $\mathcal{B}$ forment un sous ensemble des boules définissant $\mathcal{B}'$.

Deux chemins de boules $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont homotopes à extrémité fixées s'il existe une famille finie de chemins de boules $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in \{1, \dots, p\}}$ allant de x à y tels que pour tout i ,

- soit $\mathcal{B}_i$ est une restriction de $\mathcal{B}_{i+1}$,
- soit $\mathcal{B}_{i+1}$ est une restriction de $\mathcal{B}_i$,

Nous remarquons immédiatement

Proposition 16.6.4. Soit c et c' deux chemins de x à y couverts par deux chemins de boules homotopes, alors c et c' sont homotopes.

Nous démontrerons dans la proposition 16.6.6 la réciproque de ce résultat.

Nous avons la proposition immédiate suivante

Proposition 16.6.5. *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont homotopes, alors l'isométrie finale déterminée par $\mathcal{B}$ et f_1 coïncide avec l'isométrie finale déterminée par $\mathcal{B}'$ et f_1 .*

DÉMONSTRATION : En effet, il suffit de considérer le cas où $\mathcal{B}'$ est obtenu à partir de $\mathcal{B}$ en intercalant une boule B entre la boule B_1 et B_2 . On sait alors qu'il existe une boule $\tilde{B}$ isométrique à une boule hyperbolique qui contient B_1 et B_2 . Soit alors (f_1, f_2) les isométries correspondant au chemin (B_1, B_2) et (g_1, f, g_2) les isométries correspondant au chemin (B_1, B, B_2) . Nous voulons montrer que si $f_1 = f_2$ alors $g_1 = g_2$. Ceci provient de ce qu'il existe g de $\tilde{B}$ dans $\mathbb{H}^2$ telle que $f_1 = g|_{B_1}$. Alors, $g_2 = g|_{B_2} = f_2$.

Nous allons montrer

Proposition 16.6.6. *Deux chemins de boules couvrant des courbes homotopes allant de x à y sont homotopes. En particulier, deux chemins de boules sur une surface simplement connexe sont homotopes.*

DÉMONSTRATION : On utilise la même idée que pour recouvrir les chemins en recouvrant les homotopies. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux chemins de boules allant de x à y . Soit c et c' deux chemins de x à y couvert par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement.

Soit H l'homotopie entre c et c' . Considérons alors ϵ tel que la boule de centre $H(s, t)$ de rayon 4ϵ soit isométrique à une boule hyperbolique. Soit ensuite $N \in \mathbb{N}$ tel

$$\forall s, t, s', t' \text{ tel que } |s - t| + |s' - t'| \leq 1/N, \text{ alors } d(H(s, t), H(s', t')) \leq \epsilon.$$

Soit ensuite $b_{k,l}$ la boule de centre $H(k/N, l/N)$ et de rayon ϵ . Par construction pour toute suite d'indice k_i, l_i tels que $\sup(|k_i - k_{i+1}|, |l_i - l_{i+1}|) \leq 1$ la suite $B_i = b_{k_i, l_i}$ est un chemin de boules. Cette suite d'indice se représente graphiquement comme un "chemin" sur le quadrillage du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par N^2 côtés.

Nous remarquons que les chemins $(B_{i,j}, B_{i+1,j}, B_{i+1,j+1})$, $(B_{i,j}, B_{i+1,j+1})$ et $(B_{i,j}, B_{i,j+1}, B_{i+1,j+1})$ sont homotopes. Nous en déduisons que tous les chemins joignant le côté inférieur du carré au côté supérieur sont homotopes à extrémités fixés (voir figure 16.2)

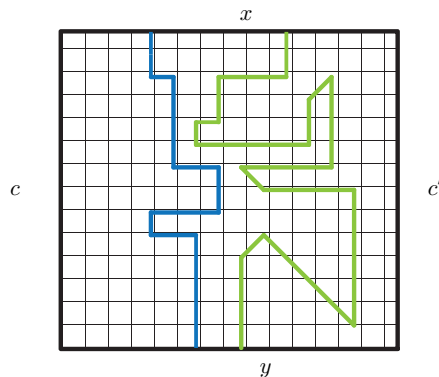


Figure 16.2: Homotopie des chemins de boules

La fin de la preuve suit de la proposition suivante.

Proposition 16.6.7. *deux chemins de boules couvrant le même chemin sont homotopes.*

DÉMONSTRATION : Nous dirons qu'un chemin de boule $\{B_i\}$ est plus fin que le chemin $\{B'_i\}$, s'il existe une suite croissante k_i tel que $B_i \subset B'_{k_i}$. Un chemin plus fin qu'un autre lui est homotope : par construction, il suffit de regarder le cas où $k_i = i$. L'homotopie est obtenue en ajoutant la boule B'_i entre B_i et B_{i+1} puis en retirant la boule B_i . La proposition suit de ce qu'il existe toujours un chemin de boule plus fin que deux chemins de boules couvrant le même chemin.

16.6.3 Surfaces hyperboliques simplement connexes

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 18.4. Nous fixons un point x de S et une isométrie définie au voisinage de x . Nous allons construire une isométrie locale ϕ de S dans $\mathbb{H}^2$. Soit y un autre point de $\mathbb{H}^2$ et soit $\mathcal{B}$ un chemin de boule joignant x à y . Soit B la dernière boule de $\mathcal{B}$. Nous posons alors pour tout z de B , $\phi(z) = g(z)$ où g est l'isométrie finale de $\mathcal{B}$. Comme tous les chemins de boules sont homotopes $g(z)$ ne dépend pas du chemin de boule de x à z . Nous en déduisons que ϕ est bien définie et que c'est une isométrie locale.

Si enfin S est complète. Il existe une géodésique entre deux points quelconques de S , l'image de cette géodésique est une géodésique de $\mathbb{H}^2$. Les extrémités d'un arc géodésique de $\mathbb{H}^2$ étant distinctes, nous en déduisons que ϕ est injective.

Chapter 17

Revêtements

17.1 Introduction

Il s'agit d'étendre à d'autres situations la propriété de relèvement mise en évidence pour l'application exponentielle $\mathbb{R} \rightarrow U$.

17.1.1 Définition

Définition 17.1.1. Une application continue $p : E \rightarrow X$ est un revêtement si tout point $x \in X$ a un voisinage U tel que

1. $p^{-1}(U) = \sqcup_{i \in I} V_i$, $V_i \subset E$, $I \neq \emptyset$, réunion disjointe d'ouverts,
2. pour chaque $i \in I$, $p|_{V_i} = V_i \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

On appelle X la base et E l'espace total du revêtement. J'appelle U un voisinage trivialisant.

Démontrons les propriétés suivantes

Proposition 17.1.2. 1. si U est un ouvert trivialisant, si V est un ouvert contenu dans U , alors V est également trivialisant.

2. Si U est un ouvert trivialisant connexe, alors p est un homéomorphisme de chaque composante connexe de $p^{-1}(U)$ sur U .
3. p est un homéomorphisme local, donc les fibres $p^{-1}(y)$ sont discrètes.
4. On peut faire des produits de revêtements $(p, p') : E \times E' \rightarrow X \times X'$.
5. Si X est connexe, les fibres $p^{-1}(x)$, $x \in X$, ont toutes le même cardinal (éventuellement infini).
6. Si $p : E \rightarrow X$ est un revêtement et $Y \subset X$, alors $p|_{p^{-1}(Y)} : p^{-1}(Y) \rightarrow Y$ est un revêtement.

DÉMONSTRATION :

1. Ce premier point est trivial.

2. Pour le deuxième point, on voit que si $p^{-1}(V) = \sqcup_{i \in I} V_i$ où les V_i sont ouverts, alors chaque V_i est à la fois ouvert et fermé dans $p^{-1}(V)$.
3. Les derniers points sont évidents.

17.1.2 Exemples

1. Soit S un espace topologique discret. Alors la projection sur le premier facteur $p : X \times S \rightarrow X$ est un revêtement appelé *revêtement trivial* de fibre S .
2. $t \mapsto e^{it}, \mathbb{R} \rightarrow U$ est un revêtement.
3. $z \mapsto e^z, \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un revêtement.
4. Si $n \neq 0, z \mapsto z^n, U \rightarrow U$, est un revêtement.
5. La restriction de $t \mapsto e^{it}$ à $]0, 3\pi[$ n'est pas un revêtement de $]0, 3\pi[$ sur U .

En effet, soit U le voisinage de -1 dans U formé des $z \in U$ dont l'argument diffère de π (modulo 2π) d'au plus ϵ . Alors $p^{-1}(U)$ est la réunion disjointe de deux intervalles, $V_1 =]\pi - \epsilon, \pi + \epsilon[$ et $V_2 =]3\pi - \epsilon, 3\pi[$. V_1 est l'image d'une section de p au-dessus de U , mais V_2 ne l'est pas. D'ailleurs, le cardinal des fibres n'est pas constant.

Proposition 17.1.3. Soit $p : E \rightarrow X$ un homéomorphisme local, avec E compact. Alors p est un revêtement.

DÉMONSTRATION : Soit $x \in X$. Alors $p^{-1}(x) = \{e_1, \dots, e_n\}$ est fini car discret et compact. Soit W_i un voisinage ouvert de e_i tel que $p|_{W_i}$ soit un homéomorphisme de W_i sur un ouvert U_i contenant x . On peut construire les ouverts W_i de façon à ce qu'ils soient tous disjoints. Soit

$$K = E \setminus \sqcup_i W_i.$$

On va montrer qu'il existe un ouvert O , contenant x inclus dans l'intersection des U_i tel que

$$p^{-1}(O) \subset \sqcup W_i.$$

si un tel ouvert O existe alors $p^{-1}(O) = \sqcup O_i$ avec $O_i = W_i \cap p^{-1}(O)$ et p est un homéomorphisme de O_i sur O – car c'est un homéomorphisme de W_i sur U_i .

Supposons donc qu'il n'existe pas, il existe alors une suite $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de points de K , tels que $\{p(z_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x . Comme K est compact, on peut extraire une suite une sous-suite convergente vers un point z_0 de K . Par continuité, $p(z_0) = x$. Nous obtenons la contradiction car $p^{-1}(x) \subset E \setminus K$. $\square$

EXEMPLE : L'application $f : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ qui à un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^{n+1}$ associe la droite vectorielle qu'il engendre est un revêtement.

En effet, soit $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Choisissons des coordonnées homogènes de sorte que $p = [0 : \dots : 1]$. Si $q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est proche de p , il admet des coordonnées homogènes de la forme $q = [x_0 : \dots : x_n]$ avec $x_n > 0$. Alors $(x_0^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2}(x_0, \dots, x_n)$ est l'unique vecteur unitaire sur la droite q dont la dernière composante est > 0 . Il dépend continûment de q . Il y a deux telles applications réciproques locales de f , donc f est un revêtement. $\square$

Proposition 17.1.4. *Soit E un espace topologique localement compact (i.e. tout point admet une base de voisinages compacts). Soit G un groupe qui agit sur E*

1. librement, i.e. si $x \in E$ et $g \neq 1$, alors $gx \neq x$;
2. proprement, i.e. si $K \subset E$ est compact, l'ensemble des $g \in G$ tels que $gK \cap K \neq \emptyset$ est fini.

Alors $X = G \div E$ est séparé, et la projection $p : E \rightarrow G \div E$ est un revêtement.

DÉMONSTRATION : Séparation : voir TD. Soit $e \in E$. Soit V un voisinage compact de e . Comme E est séparé, et comme l'intersection de V et de l'orbite de e est un ensemble fini, les points de $Ge \cap V = \{e = g_0e, g_1e, \dots, g_ne\}$ admettent des voisinages U_i deux à deux disjoints dans V . Soit $U = \bigcap_i g_i^{-1}(U_i)$. C'est un voisinage de e dont les translatés par des éléments de G sont deux à deux disjoints. La restriction de p à chaque gU est un homéomorphisme sur le voisinage $[U]$ de la classe $[p] \in G \div E$. $\square$

EXEMPLE : L'application $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est le revêtement associé à l'action du groupe à 2 éléments sur la sphère par $x \mapsto -x$.

EXEMPLE : Soit $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ le groupe cyclique à n éléments, agissant par multiplication sur U . Alors le revêtement associé n'est autre que $z \mapsto z^n, U \rightarrow U$.

EXEMPLE : Soit $G \subset \mathbb{R}$ le groupe engendré par la translation de 2π . Alors G agit librement et proprement sur $\mathbb{R}$. Le revêtement associé coïncide avec le revêtement exponentiel $\mathbb{R} \rightarrow U$.

17.2 Relèvement des homotopies

17.2.1 Relèvements

Définition 17.2.1. *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue. Un relèvement de f à E , c'est une application $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$. Si on se donne en plus des points bases $y_0 \in Y, x_0 \in X$, et un relèvement $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ dans E , on parle de relèvement d'origine $\tilde{x}_0$.*

Lemme 17.2.2. *Lorsque Y est connexe, quand f admet un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$, il est unique.*

DÉMONSTRATION : Soit $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ deux relèvements d'origine $\tilde{x}_0$. Alors $\{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}$ est ouvert. En effet, au voisinage de $\tilde{f}(y)$, p est un homéomorphisme, donc pour z proche de y , l'équation $p(\tilde{x}) = f(z)$ admet une unique solution voisine de $\tilde{f}(y)$, c'est $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(y)$. Comme cet ensemble est non vide et fermé, c'est Y , donc $\tilde{f} = \tilde{f}'$. $\square$

17.2.2 Sections

Définition 17.2.3. *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Une section de p est une application continue $s : X \rightarrow E$ telle que $p \circ s = \text{id}_X$. Une section au-dessus de $Y \subset X$, c'est une section de $p|_{p^{-1}(Y)}$, i.e. définie seulement au-dessus de Y . Une section locale en x est une section définie sur un voisinage de x .*

Proposition 17.2.4. *Nous avons*

1. Une section s au-dessus de Y est automatiquement un homéomorphisme de Y sur $s(Y)$.
2. Par définition même, un revêtement possède des sections locales en tout point x , exactement autant que d'images réciproques de x .
3. Si Y est connexe, deux sections au dessus de Y qui coïncident en un point sont égales.
4. une section locale est une application ouverte.
5. si σ est une section au-dessus d'un ouvert U connexe alors $\sigma(U)$ est une composante connexe de $p^{-1}(U)$.

17.2.3 Relèvement des chemins

La proposition suivante généralise le théorème de relèvement du revêtement exponentiel. On organise la preuve différemment.

Proposition 17.2.5. *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ admet des relèvements. Si on fixe $x_0 \in X$ et un relèvement $\tilde{x}_0 \in E$ de x_0 , il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma}$ d'origine $\tilde{x}_0$.*

DÉMONSTRATION : On se donne une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, tel que pour tout i , $c[t_j, t_{j+1}]$ soit inclus dans un ouvert trivialisant O^j . On pose ensuite $p^{-1}(O^j) = \sqcup_{i \in I} O_i^j$ et on note σ_i^j la section locale de p définie de O^j dans O_i^j .

Ensuite on construit par récurrence une suite $i_1, \dots, i_n$ telle que

$$\sigma_{i_j}^j(c(t_{j+1})) = \sigma_{i_{j+1}}^{j+1}(c(t_{j+1})).$$

Enfin, on définit $\tilde{c} = \sigma_{i_j}^j(c)$ sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$

□

17.2.4 Relèvement des homotopies

La proposition suivante généralise l'invariance du degré par homotopie.

Proposition 17.2.6. *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Soit Y un espace topologique. Fixons des points bases $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ et un relèvement $\tilde{x}_0 \in E$ de x_0 . Soit $F : [0, 1] \times Y \rightarrow X$ une homotopie entre deux applications f_0 et $f_1 : Y \rightarrow X$ envoyant y_0 sur x_0 . Si f_0 possède un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$, il en est de même de F , et par conséquent de f_1 .*

DÉMONSTRATION : D'après la proposition précédente, pour chaque $y \in Y$, le chemin $\gamma_y : s \mapsto F(s, y)$ possède un unique relèvement $\tilde{\gamma}_y$ d'origine $\tilde{f}_0(y)$. On pose $\tilde{F}(s, y) = \tilde{\gamma}_y(s)$. Pour montrer que $\tilde{F}$ est continue, il suffit de vérifier que le procédé de relèvement est continu, i.e. que deux chemins voisins se relèvent en deux chemins voisins. Or relever un chemin γ_y , c'est faire appel à un nombre fini de sections locales s_j (définies sur les ouverts trivialisants recouvrant le compact $\gamma([0, 1])$). Les mêmes sections locales permettent de relever γ_z pour z proche de y .

Donnons une preuve plus précise, en utilisant la démonstration du relèvements des chemins. Nous nous donnons un point y de Y et le chemin $c = \gamma_y$ défini plus haut. D'après la preuve du relèvement des chemins, nous avons une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, tel que pour tout i , $c[t_j, t_{j+1}]$ soit inclus dans un ouvert trivialisant O^j . On pose ensuite $p^{-1}(O^j) = \sqcup_{i \in I} O_i^j$ et on note σ_i^j la section locale de p définie de O^j dans O_i^j .

Nous avons ensuite par récurrence une suite $i_1, \dots, i_n$ définie de manière unique par la propriétés suivantes

$$\sigma_{i_j}^j(c(t_{j+1})) = \sigma_{i_{j+1}}^{j+1}(c(t_{j+1})).$$

Enfin, on définit $\tilde{c} = \sigma_{i_j}^j(c)$ sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$.

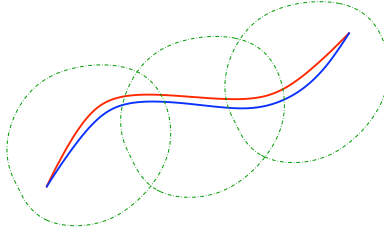
Nous nous proposons de montrer que pour t appartenant à $[t_j, t_{j+1}]$, pour (z, s) au voisinage de (y, t) on a $\tilde{F}(z, s) = \sigma_{i_j}^j F(z, s)$. Ceci montrera que $\tilde{F}$ est continue. Or pour z suffisamment proche de y on a par continuité de F

$$\begin{aligned} \gamma_z[t_j, t_{j+1}] &\subset O^j, \\ \sigma_{i_j}^j(\gamma_z(t_{j+1})) &\in O_{i_{j+1}}^{j+1}, \end{aligned}$$

car ce sont deux propriétés ouvertes. En particulier, comme les σ sont des sections locales on a

$$\sigma_{i_j}^j(\gamma_z(t_{j+1})) = \sigma_{i_{j+1}}^{j+1}(\gamma_z(t_{j+1})).$$

D'après la construction du relèvement des chemins, cela donne bien $\tilde{F}(z, s) = \sigma_{i_j}^j F(z, s)$. □



Corollaire 17.2.7. Soit α, β deux chemins dans X de mêmes extrémités x_0 et x_1 . Soit $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0 . Soit $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ les relèvements de α et β d'origine $\tilde{x}_0$. Si α et β sont homotopes à extrémités fixées, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. En particulier, si α est un lacet homotope à une constante, $\tilde{\alpha}$ est un lacet.

DÉMONSTRATION : Par l'hypothèse, l'homotopie F de α à β satisfait $F(s, 1) = x_1$ pour tout s . Son relèvement $\tilde{F}$ satisfait $\tilde{F}(s, 1) \in p^{-1}(x_1)$ pour tout s . Comme $p^{-1}(x_1)$ est discret, $\tilde{F}(s, 1)$ ne dépend pas de s , donc $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(0, 1) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{\beta}(1)$. □

17.3 Critère de relevabilité

Théorème 31. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe, $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0 . Soit Y un espace connexe et localement connexe par arcs, soit $y_0 \in Y$ un point base. Soit

$f : Y \rightarrow X$ une application continue qui envoie y_0 en x_0 . Alors f possède un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$ si et seulement si

$$f_{\#}(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)).$$

Le relèvement est alors unique.

DÉMONSTRATION : Supposons que f possède un relèvement $\tilde{f} : Y \rightarrow E$. Alors $f_{\#} = p_{\#} \circ \tilde{f}_{\#}$ donc son image est contenue dans celle de $p_{\#}$.

Réciproquement, supposons que l'image de $f_{\#}$ est contenue dans celle de $p_{\#}$. Soit $y \in Y$ et γ un chemin de y_0 à y . Le chemin $\alpha = f \circ \gamma$ de x_0 à $f(y)$ possède un relèvement $\tilde{\alpha}$ d'origine $\tilde{x}_0$. Posons $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$. Si γ' est un autre lacet de y_0 à y , alors le lacet $\alpha' \cdot \alpha^{-1} = f_{\#}(\gamma' \cdot \gamma^{-1})$ dans X est homotope à un lacet de la forme $p_{\#}(\beta)$ où β est un lacet dans E basé en x_0 . Autrement dit, les chemins $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ et α' sont homotopes à extrémités fixées dans X . Ils se relèvent donc en des chemins de même extrémités. Or l'unique relèvement d'origine $\tilde{x}_0$ de $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ est $\beta \cdot \tilde{\alpha}$. On conclut que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$. Nous définissons alors $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$ ne dépend pas du choix du chemin γ .

Il nous reste à démontrer la continuité de $\tilde{f}$. Soit y un point quelconque de Y . Par construction nous avons une section locale σ définie sur un ouvert trivialisant O contenant $f(y)$ et telle que $\tilde{f}(y) = \sigma \circ f(y)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\tilde{f} = \sigma \circ f$ au voisinage de y . Soit donc U un voisinage connexe par arcs de y tel que $f(U)$ soit inclus dans O . Soit z un point de U , nous pouvons alors trouver un chemin de y_0 à z tel que $c(1/2) = y$ et $c[1/2, 1]$ soit inclus dans U . Soit par ailleurs $\tilde{f}_c$ le relèvement de $f \circ c$ partant de $\tilde{x}_0$. D'après ce que nous avons vu, $\tilde{f}_c(1/2) = \tilde{f}(y)$. Nous en déduisons par unicité du relèvement des chemins que $\sigma^i \circ f \circ c$ coïncide avec $\tilde{f}_c$ sur l'intervalle $[1/2, 1]$. En particulier, $\sigma^i \tilde{f}(z) = \sigma^i \circ f \circ c(1) = \tilde{f}(z)$.

EXEMPLE : Une application $f : U \rightarrow U$ se relève à travers le revêtement $z \mapsto z^n$ si et seulement si elle représente une classe d'homotopie divisible par n . Autrement dit, si et seulement si son degré est divisible par n .

En particulier,

Corollaire 17.3.1. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement, soit $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0 . Soit Y un espace connexe par arcs, simplement connexe et localement connexe par arcs, avec point base y_0 . Toute application continue $f : Y \rightarrow X$ envoyant y_0 en x_0 possède un (unique) relèvement à E d'origine $\tilde{x}_0$.

□

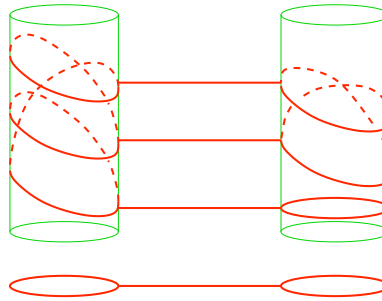
REMARQUES : Supposons E connexe par arcs. La réciproque du corollaire 25.2.5 est vraie si et seulement si E est simplement connexe.

Lemme 17.3.2. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Supposons E connexe par arcs. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents.

1. Pour tout lacet α , $\tilde{\alpha}$ est un lacet $\Rightarrow \alpha$ est homotope à une constante.
2. E est simplement connexe.

DÉMONSTRATION : Si E est simplement connexe, un relèvement $\tilde{\alpha}$ qui est un lacet est homotope à une constante, donc $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ l'est aussi. Réciproquement, soit $\tilde{\gamma}$ un lacet dans E basé en $\tilde{x}_0$. C'est un relèvement du lacet $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Par hypothèse, γ est homotope à une constante dans X . Soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie du lacet constant 1_{x_0} à γ . Comme 1_{x_0} se relève en le lacet constant $1_{\tilde{x}_0}$, F se relève en $\tilde{F}$, qui est une homotopie de $1_{\tilde{x}_0}$ à $\tilde{\gamma}$. $\square$

EXERCICE : La figure suivante représente un revêtement à 3 feuillets. Soit x_0 le sommet de droite de X . Déterminer les relèvements de divers lacets basés en x_0 , pour diverses origines $\tilde{x}_0$. En déduire que certains lacets ne sont pas homotopes à une constante.



17.3.1 Automorphismes d'un revêtement

Définition 17.3.3. Un automorphisme ϕ d'un revêtement connexe $p : E \rightarrow X$ est un homéomorphisme tel que $p \circ \phi = p$. On note $\text{Aut}(E/X)$ le groupe des automorphismes d'un revêtement $p : E \rightarrow X$.

Théorème 32. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement simplement connexe de X . Alors

1. pour tout $x_0 \in X$, $\text{Aut}(E/X)$ agit simplement transitivement sur $p^{-1}(x_0)$.
2. Soit x_0 un point fixé, l'application qui à un élément γ de $\text{Aut}(E/X)$ associe le lacet $[p \circ c]$ où c est un chemin quelconque de x_0 à $\gamma(x_0)$ est un isomorphisme de groupe.

DÉMONSTRATION : Cela résulte du théorème 31 : étant donnés deux relèvements $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}'_0$ de x_0 , il existe un unique isomorphisme du revêtement $f : E \rightarrow E$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$. $\square$

Corollaire 17.3.4. Soit $p : E \rightarrow X$, un revêtement d'espace total simplement connexe. Alors X est homéomorphe à $E / \text{Aut}(E; X)$.

DÉMONSTRATION : En effet, le résultat précédent assure que il y a une bijection entre $E / \text{Aut}(E, X)$ et X de plus cette application est un homéomorphisme: on remarque en effet que p étant un revêtement est à la fois continue et ouverte, dès lors U est un ouvert de X si et seulement si $p^{-1}(U)$ est un ouvert de E .

EXERCICE : Vérifier que $\text{Aut}(E/X)$ agit librement et proprement sur E .

REMARQUES

1. En particulier $\#(\pi_1(X)) = \#(p^{-1}(x_0))$ si $p : E \rightarrow X$ est un revêtement simplement connexe. Montrez en application que $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Pour le revêtement exponentiel, les automorphismes du revêtement sont les translations d'un multiple de 2π .
3. Si p est une isométrie locale qui est un revêtement entre deux surfaces hyperboliques, alors tout automorphisme est une isométrie. En particulier, $\text{Aut}(\mathbb{H}^2/(\Gamma \backslash \mathbb{H}^2)) = \Gamma$.
4. De même, $\pi_1(\Gamma \backslash \mathbb{H}^2) = \Gamma$.

17.4 Construction d'un revêtement simplement connexe

Notre but est de démontrer la propriété suivante

Théorème 33. *Soit X une surface hyperbolique connexe. Alors X possède un revêtement E connexe et simplement connexe.*

REMARQUE Ce théorème est beaucoup plus général. Il est vrai en général si X est *semi-localement simplement connexe* c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes.

- X est connexe,
- tout point x admet un voisinage U tel que tout lacet basé en x , contenu dans U soit homotope à une constante dans X .

Nous avons alors

Théorème 34. *Soit X un espace topologique semi-localement simplement connexe. Alors X possède un revêtement E connexe et simplement connexe.*

La preuve utilise la même idée mais est plus technique. Nous préférons donner la preuve dans le cadre des surfaces hyperboliques.

17.4.1 Construction d'un revêtement simplement connexe

La construction que nous allons donner utilise les chemins de boules. La démonstration dans le cas d'un espace topologique quelconque utilise les chemins et elle suit le même schéma.

La construction

Nous fixons un point x_0 dans S et considérons l'espace Ω_{x_0} formé des paires $(\mathcal{B}, y)$ où y est un point de S et $\mathcal{B}$ un chemin de boules de x_0 à y . Nous considérons l'espace $E = \Omega_{x_0} / \sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence donnée par l'homotopie. Nous notons π la projection de E dans S donnée par $\pi[(\mathcal{B}, y)] = y$.

Des courbes

Soit $\tilde{y} = [(\mathcal{B}, y)]$ et $\tilde{z} = [(\mathcal{B}', z)]$ deux points de E , nous dirons qu'un chemin c tracée sur S est une B -courbe de $\tilde{y}$ à $\tilde{z}$ si

- la courbe c va de x à y ,
- la courbe c est homotope à une courbe de la forme $\gamma^{-1}.\gamma'$ où γ est couverte par $\mathcal{B}$ et γ' par $\mathcal{B}'$.

Nous avons alors la proposition suivante dont la preuve est évidente

Proposition 17.4.1. *Soit $\tilde{y} = [(\mathcal{B}, y)]$ et $\tilde{z} = [(\mathcal{B}', z)]$ avec $\mathcal{B} = (B_0, \dots, B_n)$ alors toute courbe c de y à z tracée dans B_n est une B -courbe de $\tilde{y}$ à $\tilde{z}$.*

Une distance

Nous construisons maintenant une fonction sur d la fonction définie sur $E \times E$ par

$$d(\tilde{z}, \tilde{y}) = \inf\{\ell(c) \mid c \text{ est une } B\text{-courbe de } \tilde{z} \text{ à } \tilde{y}\}.$$

Nous démontrons la proposition cruciale suivante

Proposition 17.4.2. *Soit $\tilde{x} = [(\mathcal{B}, x)]$ un point de E . Soit ϵ tel que la boule de centre x de rayon ϵ est isométrique à une boule hyperbolique. Soit*

$$U_\epsilon := \{\tilde{z} \mid d(\tilde{z}, \tilde{y}) \leq \epsilon\}.$$

Alors, pour tout $\tilde{z} \in U_\epsilon$, nous avons

$$\tilde{z} = [(\mathcal{B}, \pi(\tilde{z}))].$$

Nous en déduisons deux corollaires important.

DÉMONSTRATION : On a $\mathcal{B} = (B_0, \dots, B_n)$. Soit $b \subset B_n \mathcal{B}(x, \epsilon)$ une boule. Alors $(B_0, \dots, B_n, b, B(x, \epsilon))$ est un chemin de boules homotope à $\mathcal{B}$. Autrement dit on peut toujours supposer que

$$B_n = B(x, \epsilon).$$

Soit maintenant $\tilde{z} = [(\mathcal{B}', z)]$ un point de U_ϵ . Soit γ' un chemin couvert par $\mathcal{B}'$ et γ un chemin couvert par $\mathcal{B}$.

Par définition de U_ϵ il existe une courbe c de longueur plus petite que ϵ qui va de z à x telle que $\gamma.c$ est homotope à γ' .

La courbe c est de longueur plus petite que ϵ et est donc tracée dans B . En particulier $\gamma.c$ est couverte par $\mathcal{B}$. Deux chemins de boules recouvrant des chemins homotopes sont homotopes, nous en déduisons que

$$[\mathcal{B}] = [\mathcal{B}'].$$

Isométrie locale

Nous avons alors, avec les même hypothèses et notations que le paragraphe précédent

Proposition 17.4.3. 1. *L'application π est une bijection de U_ϵ dans $B(x, \epsilon)$.*

2. *Pour tout $\tilde{y}$ et $\tilde{z}$ de U_ϵ ,*

$$d(\tilde{z}, \tilde{y}) = d(\pi(\tilde{y}), \pi(\tilde{z})).$$

DÉMONSTRATION : Le premier point suit immédiatement de la proposition précédente. Pour le deuxième point il nous suffit de prouver

$$d(\tilde{z}, \tilde{y}) \leq d(\pi(\tilde{y}), \pi(\tilde{z})).$$

L'autre inégalité étant évidente. Soit c un arc géodésique de $\pi(\tilde{y})$ à $\pi(\tilde{z})$ tracée dans $B(x, \epsilon)$. Alors d'après les deux propositions précédentes c est une B -courbe de $\tilde{y}$ à $\tilde{z}$.

Dès lors

$$d(\tilde{y}, \tilde{z}) \leq \ell(c) = d(\pi(\tilde{y}), \pi(\tilde{z})).$$

Isométrie locale et revêtement

Nous en déduisons

Proposition 17.4.4. 1. *d est une distance,*

2. *π est une isométrie locale,*

3. *π est un revêtement*

DÉMONSTRATION : La fonction d vérifie l'inégalité triangulaire et est symétrique. Par la proposition précédente $d(\tilde{y}, \tilde{z}) = 0$ si et seulement si $\tilde{y} = \tilde{z}$. De même π est une isométrie locale.

Montrons que π est un revêtement. Soit x un point de S et ϵ tels que $B(x, 2\epsilon)$ est isométrique à une boule hyperbolique. Pour tout y tel que $\pi(y) = x$. Nous avons vu que π est une isométrie de $B(y, 2\epsilon)$ sur $B(x, 2\epsilon)$. Nous en déduisons que

$$\pi^{-1}B(x, \epsilon) = \sqcup_{y|\pi(y)=x} B(y, \epsilon). \quad (17.1)$$

Montrons tout d'abord que la réunion est disjointe: dans le cas contraire soit $y, z \in \pi^{-1}\{x\}$. Si $B(y, \epsilon) \cap B(z, \epsilon) \neq \emptyset$ alors

$$z \in B(y, 2\epsilon),$$

comme $\pi(z) = \pi(y)$, nous en déduisons que $y = z$.

Il est évident que

$$\sqcup_{y|\pi(y)=x} B(y, \epsilon) \subset \pi^{-1}B(x, \epsilon). \quad (17.2)$$

Montrons l'inclusion inverse. Soit donc z tel que $d(\pi(z), x) \leq \epsilon$. Alors

$$B(\pi(z), \epsilon) \subset B(x, 2\epsilon).$$

en particulier $B(\pi(z), \epsilon)$ est isométrique à une boule hyperbolique et notre proposition précédente nous assure que π est une bijection de $B(z, \epsilon)$ dans $B(\pi(z), \epsilon)$. Comme $x \in B(z, \epsilon)$, il existe $y \in \pi^{-1}\{x\}$, tel que $y \in B(z, \epsilon)$. Ainsi $z \in B(y, \epsilon)$. Nous venons de montrer que

$$\pi^{-1}B(x, \epsilon) \subset \sqcup_{y|\pi(y)=x} B(y, \epsilon). \quad (17.3)$$

Ceci conclut la preuve.

Conclusion

Il nous reste à montrer

Proposition 17.4.5. *L'espace E est simplement connexe.*

DÉMONSTRATION : Soit β un lacet dans E basé en x_0 . Par le lemme 25.3.2, il nous suffit de montrer que α est homotope à une constante.

Recouvrons $\alpha = \pi(\beta)$ par un chemin de boules $(B_1, \dots, B_n)$. Par la proposition 16.6.4, il nous suffit de montrer que le chemin de boules $(B_1, \dots, B_n)$ est homotope à une constante.

Soit

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1,$$

une subdivision de $[0, 1]$ telle que $\alpha[t_{i-1}, t_i] \subset B_i$.

Nous allons montrer que si $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ alors

$$\beta(t) = [(B_1, \dots, B_i), \alpha(t)]$$

Supposons par recurrence que

$$\beta(t_{i-1}) = [(B_1, \dots, B_{i-1}), \alpha(t_{i-1})] \quad (17.4)$$

Par définition, $(B_1, \dots, B_{i-1})$ est homotope à $(B_1, \dots, B_i)$ avec les extrémités fixées $\alpha(0)$ et $\alpha(t_{i-1})$. Nous en déduisons que l'ensemble des t qui vérifie l'équation (17.4) est non vide. Par ailleurs, la courbe définie de $[t_{i-1}, t_i]$ dans E par

$$t \mapsto [(B_1, \dots, B_i), \alpha(t)]$$

est continue et est donc un relevé de α sur $[t_{i-1}, t_i]$. Nous en déduisons que tous les éléments de $[t_{i-1}, t_i]$ vérifie (17.4).

En particulier, puisque β est un lacet

$$[(B_1, \alpha(0))] = \beta(0) = \beta(1) = [(B_1, \dots, B_n), \alpha(0)].$$

Nous en déduisons par définition de E que le chemin de boules $(B_1, \dots, B_n)$ est homotope au chemin constant.

17.4.2 Propriété universelle

Proposition 17.4.6. *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe par arcs et simplement connexe de X . Soit $p' : E' \rightarrow X$ un autre revêtement. Soit $\tilde{x}_0 \in E$ et $\tilde{x}'_0$ des relèvements d'un même point base $x_0 \in X$. Alors il existe une unique application $m : E \rightarrow E'$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$ telle que $p' \circ m = p$.*

DÉMONSTRATION : D'après le Corollaire 25.3.1, l'application $p : E \rightarrow X$ possède un relèvement $\tilde{p} : E \rightarrow E'$, tel que $p = p' \circ \tilde{p}$ et $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$. C'est un morphisme de revêtements. Inversement, si $m : E \rightarrow E'$ est un morphisme de revêtements, alors $p = p' \circ m$, donc m est un relèvement de p . D'après le Corollaire 25.3.1, la condition sur les points bases le rend unique. $\square$

1. Lorsque E' est connexe, $m : E \rightarrow E'$ est un revêtement. On peut donc penser au revêtement E' comme à un revêtement intermédiaire entre X et E .
2. Les revêtements finis du cercle $z \mapsto z^n$, $U \rightarrow U$, sont eux mêmes revêtus par le revêtement exponentiel.

17.4.3 Unicité du revêtement simplement connexe

Théorème 35. Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit $x_0 \in X$ un point base. Soit $p : E \rightarrow X$ et $p' : E' \rightarrow X$ deux revêtements connexes et simplement connexes de X . Soit $\tilde{x}_0 \in E$ et $\tilde{x}'_0 \in E'$ des relèvements de x_0 . Il existe un unique homéomorphisme $f : E \rightarrow E'$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$ tel que $p' \circ f = p$.

DÉMONSTRATION : Résulte de la propriété universelle. $\square$

Autrement dit, une fois fixés des points bases, le revêtement connexe et simplement connexe de X est canoniquement défini, i.e. unique à unique isomorphisme près.

Terminologie. On appelle le revêtement simplement connexe *revêtement universel*.

EXERCICE : Soit X le graphe de l'exercice 25.3. Déterminer le revêtement universel de X (c'est un arbre infini de valence 3, comment s'enroule-t-il autour de X ?

Chapter 18

Revêtement des surfaces hyperboliques

18.1 Le théorème d'uniformisation

Notre but principal est de démontrer le résultat suivant qui montre que les surfaces hyperboliques complètes sont obtenues par quotient.

Théorème 36. [UNIFORMISATION DES SURFACES HYPERBOLIQUES] *Soit Σ une surface hyperbolique complète, alors il existe un sous-groupe discret Γ des isométries du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ tel que Σ est isométrique à $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$.*

De plus Γ est isomorphe au groupe $\pi_1(\Sigma, s)$.

Nous démontrerons dans les prochaines sections des résultats dont l'intérêt est autonome et qui relient revêtements et isométries locales dans le cas des surfaces hyperboliques.

- L'espace total d'un revêtement de base une surface hyperbolique peut être muni d'une structure de surface hyperbolique tel que la projection soit une isométrie locale.
- Une isométrie locale surjective d'une surface hyperbolique complète dans une autre est un revêtement.

18.2 Revêtements

Commençant par étudier l'espace total d'un revêtement au-dessus d'une surface hyperbolique.

Théorème 37. *Soit p un revêtement de S un espace topologique connexe sur une surface hyperbolique Σ . Alors il existe une structure hyperbolique sur S telle que p est une isométrie locale. Si de plus Σ est complète alors S est complète.*

Nous allons procéder comme nous l'avons fait pour les quotients : définir les courbes C^1 par morceaux, puis leur longueur, puis une métrique.

Définition 18.2.1. Si c est une courbe à valeurs dans S , nous dirons que c est C^1 par morceaux si $p \circ c$ l'est.

Nous avons alors

Proposition 18.2.2. Il existe toujours une courbe C^1 par morceaux joignant deux points quelconques de S .

DÉMONSTRATION : On montre en effet que l'ensemble des points joints à x par une courbe C^1 par morceaux est ouvert et fermé en utilisant la propriété de revêtement.

Définition 18.2.3. La longueur $\ell(c)$ d'une courbe c est la longueur de $p \circ c$.

Nous définissons enfin, pour tout x et y de S

$$d(x, y) = \inf\{\ell(c) \mid c(0) = x, c(1) = y\}.$$

Nous avons alors la proposition suivante

Proposition 18.2.4. Soit y_0 un point de Σ , il existe $\epsilon > 0$, tel que pour tout x_0 tel que $p(x_0) = y_0$, si $d(x, x_0) < \epsilon$ et $d(y, x_0) < \epsilon$, alors $d(x, y) = d(p(x), p(y))$.

DÉMONSTRATION : Soit ϵ tel que $U = B(p(x_0), 2\epsilon)$ est isométrique à une boule de l'espace modèle et tel que

$$p^{-1}(U) = \sqcup_i U_i,$$

où p est un homéomorphisme de U_i dans U . On suppose que $x_0 \in U_{i_0}$.

Nous remarquons que si c est une courbe joignant x_0 à x de longueur plus petite que ϵ alors $p(c) \subset p(U)$ et donc $c \subset U_{i_0}$. Nous en déduisons que

$$U_{i_0} = \{x \in S, d(x_0, x) < 2\epsilon\}.$$

Par ailleurs, si $d(x, x_0) < \epsilon$ et $d(y, x_0) < \epsilon$, et si c est une courbe joignant x à y de longueur plus petite que ϵ alors c est incluse dans U_{i_0} . En particulier

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \inf\{\ell(c) \mid c(0) = x, c(1) = y\} \\ &= \inf\{\ell(c) \mid c(0) = x, c(1) = y; \ell(c) \leq \epsilon\} \\ &= \inf\{\ell(p(c)) \mid c(0) = x, c(1) = y; \ell(c) \leq \epsilon\} \\ &= d(p(x), p(y)). \end{aligned} \tag{18.1}$$

Corollaire 18.2.5. la fonction d est une métrique et p est une isométrie locale. En particulier, S est une surface hyperbolique.

18.2.1 Complétude

Il nous reste à montrer que si σ est complète alors S est complète. Nous nous donnons donc une suite de Cauchy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Par construction de la distance

$$d(\pi(x), \pi(y)) \leq d(x, y).$$

Nous en déduisons donc que la suite $\{\pi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et soit donc y_0 sa limite. Soit ϵ tel que $U = B(y_0, 2\epsilon)$ soit isométrique avec une boule hyperbolique et trivialisant. Nous avons vu alors que pour tout y_i dans $p^{-1}(y_0)$, p est une isométrie de $B(y_0, \epsilon)$ sur $B(y_0, \epsilon)$. Nous en déduisons que si $y_i \neq y_j$, $d(y_i, y_j) \geq \epsilon$.

Nous allons montrer qu'il existe un unique $z_0 \in p^{-1}(y_0)$ tel que pour n suffisamment grand $d(x_n, z_0) \leq \epsilon$.

En il existe N , tel que si n et p sont plus grands que N , alors

$$\begin{aligned} d(x_n, x_p) &< \epsilon/2 \\ d(\pi(x_n), y_0) &< \epsilon/2. \end{aligned}$$

Il existe donc pour n plus grand que N , un point $y(n) \in p^{-1}(y_0)$ tel que $d(x_n, y(n)) < \epsilon/2$. Dès lors si n et p sont plus grands que N , alors $d(y(n), y(p)) < \epsilon$ et donc $y(n) = y(p) := z_0$.

Comme p est une isométrie de $B(z_0, \epsilon)$ sur $B(y_0, \epsilon)$, nous en déduisons que la suite $\{x_n\}$ converge vers z_0 . La surface S est donc complète.

18.3 Toute isométrie locale est un revêtement

Théorème 38. *Soit π une isométrie locale surjective d'une surface hyperbolique complète S sur une surface hyperbolique Σ . Alors π est un revêtement.*

18.3.1 Préliminaires : isométries locales et revêtement

Lemme 18.3.1. *Soit S une surface hyperbolique complète sans bord. Soit x un point de S . Soit π une isométrie locale de $B(x, R)$ sur Σ . Soit x un point de S et γ une géodésique passant par $\pi(x)$ et de longueur inférieure à R , il existe alors une géodésique c dans S passant par x telle que $\pi \circ c = \gamma$.*

DÉMONSTRATION : Soit donc γ définie de l'intervalle I à valeurs dans Σ , telle que $\gamma(0) = p(x)$. Comme p est une isométrie locale au voisinage de x , il existe une géodésique c définie sur un intervalle $J \subset I$ contenant 0 telle que $p \circ c|_J = \gamma|_J$. Comme S est complète sans bord, nous pouvons prolonger par le théorème de Hopf-Rinow c sur $\mathbb{R}$ tout entier. La courbe $p \circ c$ est alors une géodésique, comme elle coïncide avec γ sur un intervalle, elle coïncide avec γ partout.

Lemme 18.3.2. *Soit S une surface complète et π une isométrie locale de $B(x, R)$ avec x appartenant à S dans $B(x_0, R)$ où x_0 appartient à $\mathbb{H}^2$. Alors π est une bijection isométrique de $B(x, R/4)$ dans $B(x_0, R/4)$.*

DÉMONSTRATION : Nous devons montrer que π de $B(x, R/4)$ dans $B(x_0, R/4)$ est injective et surjective.

L'injectivité est facile : si x et y sont deux points distincts de $B(x, R/4)$, il existe une géodésique minimisante γ joignant x à y . Comme $\ell(\gamma) \leq R/2$, nécessairement γ est à valeurs dans $B(x_0, R)$. La courbe $\pi(\gamma)$ est alors un arc géodésique non constant de $\mathbb{H}^2$; ses extrémités sont donc distinctes. Nous venons de montrer que $\pi(x) \neq \pi(y)$.

La surjectivité découle du lemme précédent. Soit z un point de $B(\pi(x), R/4)$. Soit γ la géodésique de $\pi(x)$ à z de longueur plus petite que $R/4$. Nous avons vu alors qu'il existe une

géodésique c de même longueur que γ telle que $\pi \circ c = \gamma$. En particulier, soit $t = c(d(x, z))$, alors $d(t, x) < R/4$ et $\pi(t) = z$.

18.3.2 Preuve du théorème

DÉMONSTRATION : Soit en effet x un point de Σ et ϵ tel que $B(x, \epsilon)$ est isométrique à une boule hyperbolique. Soit $U = B(x, \epsilon/4)$. Soit $z \in p^{-1}(x)$ et

$$U_z = B(z, \epsilon/4)$$

D'après le lemme 18.3.2, π est une isométrie bijective de U_z dans U . Par ailleurs, si $U_z \cap U_{z'} \neq \emptyset$, nous en déduisons que $d(z, z') < \epsilon$. Soit alors γ la géodésique minimisante joignant z à z' . Alors $\pi(\gamma)$ est une géodésique de longueur inférieure à ϵ joignant x à x et nous obtenons la contradiction avec le fait que $B(x, \epsilon)$ est isométrique avec une boule hyperbolique.

18.4 Uniformisation des surfaces hyperboliques

Nous pouvons maintenant démontrer notre théorème d'uniformisation.

Théorème 39. *Si S est une surface hyperbolique complète, il existe alors un sous-groupe Γ de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$, tel que S est isométrique à $\mathbb{H}^2/\Gamma$. De plus, Γ est isomorphe à $\pi_1(S)$.*

DÉMONSTRATION : D'après le théorème 55, la surface S admet un revêtement simplement connexe. D'après le théorème 37, l'espace total de ce revêtement Σ admet une structure hyperbolique complète. D'après le théorème , Σ est isométrique au plan hyperbolique. Alors soit $\Gamma = \text{Aut}(\Sigma, S)$, comme Σ est isométrique au plan hyperbolique, $\Gamma \subset \text{Iso}(\mathbb{H}^2)$. D'après le théorème 58, $S = \Sigma/\Gamma$ et Γ est isomorphe à $\pi_1(S)$.

Chapter 19

Décomposition en pantalons

Le but de ce chapitre est de démontrer qu'une surface hyperbolique compacte s'obtient par recollement en pantalons.

19.1 Géodésiques fermées

Soit S une surface hyperbolique. Nous rappelons qu'un *lacet géodésique* est un lacet $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ localement minimisant. Une *géodésique fermée* ou *périodique* de longueur ℓ est une géodésique $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$ telle que $\gamma(s + \ell) = \gamma(s)$.

Théorème 40. Soit S une surface hyperbolique complète et s un point de S . Alors

1. tout lacet c basé en s est homotope – à extrémités fixées – à un unique lacet géodésique γ . De plus $\ell(c) \geq \ell(\gamma)$.
2. Supposons S compacte, alors tout lacet c est homotope librement à une géodésique fermée γ . De plus, $\ell(c) \geq \ell(\gamma)$.

19.2 Courbes plongées

Nous dirons qu'un lacet est *plongé* s'il est injectif.

Théorème 41. Soit S une surface hyperbolique compacte. Alors

1. Si c est un lacet plongé, alors la géodésique auquel il est librement homotope est plongée.
2. Soient c_1 et c_2 deux lacets qui ne s'intersectent pas. Alors les géodésiques fermées auxquelles ils sont homotopes librement ne s'intersectent pas.

19.3 Une caractérisation des surfaces hyperboliques simplement connexes

19.3.1 Surfaces à coins carrés

Théorème 42. *Soit S une surface hyperbolique compacte à coins carrés ne contenant aucune géodésique fermée. Alors S est simplement connexe et est isométrique à un polygone du plan hyperbolique.*

19.4 Une caractérisation géométrique des pantalons

Théorème 43. *Soit S une surface hyperbolique compacte. On suppose que les seules géodésiques fermées plongées dans S sont tracées sur le bord. Alors S est un pantalon.*

19.5 Classification des surfaces

Nous pouvons alors montrer

Théorème 44. *Soit S une surface hyperbolique. Il existe alors g géodésique plongées $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ telle que $S \setminus \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_g$ est une réunion finie de l'intérieur de n pantalons.*

Nous remarquons que ce nombre n est tel que $\text{Aire}(S) = 2\pi n$. Autrement dit, le nombre de pantalons ne dépend que de la surface. Il s'appelle la *caractéristique d'Euler* de la surface. Nous verrons plus tard que ce nombre ne dépend que du groupe fondamental de la surface. Un petit calcul combinatoire nous dit que $3p = 2n$.

Chapter 20

Géométrie différentielle des surfaces

20.1 Cartes et atlas

Définition 20.1.1. Soit M un espace topologique.

- (i) Une carte sur M est une paire (U, X) où U est un ouvert de M et $X = (x_1, \dots, x_p)$ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Les fonctions x_i sont les coordonnées, l'ouvert U est le domaine de la carte, l'entier p est la dimension de la carte..
- (ii) Deux cartes (U, X) et (V, Y) sont C^∞ -compatibles si le changement de cartes $Y \circ X^{-1}$ de $X(U \cap V)$ vers $Y(U \cap V)$ est un C^r difféomorphisme.
- (iii) Un atlas est un ensemble de cartes $\{(U_i, X^i)\}$ de même dimension qui sont C^∞ compatibles et telles que $\{U_i\}$ est un recouvrement de M .
- (iv) Deux atlas sont équivalents si toutes leurs cartes sont compatibles, ou de manière équivalente si la réunion est encore un atlas.
- (v) Une structure différentielle sur M est une classe d'atlas compatibles.

Ceci nous amène à la définition suivante

Définition 20.1.2. [VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES] Un espace topologique séparé et réunion dénombrable de compact muni d'une structure différentielle est une variété différentielle. Une carte est compatible avec la structure de variété si elle est compatible avec un atlas définissant la structure de variété.

Par abus de langage on dira que $X = (x_1, \dots, x_p)$ défini au voisinage de m sont des coordonnées au voisinage d'un point m d'une variété M si il existe un ouvert U contenant m tel que (U, X) est un cartes compatible avec la structure de variété. Autrement dit, on sera souvent amené à parler de coordonnées sans préciser le domaine de la carte correspondante.

20.1.1 Exemples

Nous avons vu deux exemples de variétés différentielles

1. Les cartes affines donnent une structure de variétés différentielles sur les espaces projectifs réels et complexe.
2. Les surfaces hyperboliques (sans bord) sont également des variétés différentielles de dimension 2 (on parle alors de *surface*) leur structure de variété est donnée par les atlas des cartes (U, X) où X est une isométrie de U sur un ouvert du plan hyperbolique.
3. Un ouvert d'un espace affine est muni d'une structure de variété. Plus généralement tout ouvert d'une variété a une structure de variété.

20.2 Fonctions et applications différentiables

Dans ce qui suit une fonction sera indifféremment à valeurs réelles ou complexes.

20.2.1 Fonctions

Définition 20.2.1. (i) Soit f une fonction définie sur un ouvert V d'un espace topologique espace topologique M . On dit que f est C^r par rapport à la carte (U, X) si $f \circ X^{-1}$ est de classe C^r .

(ii) Soit f une fonction définie sur un espace topologique M . On dit que f est C^r par rapport à un atlas si f est de classe C^r dans toutes les cartes de l'atlas.

(iii) Soit f une fonction sur une variété, alors elle est de classe C^r si elle est de classe C^r pour l'un des atlas définissant la structure différentielle.

Autrement dit une fonction f est de classe C^r au voisinage d'un point, s'il existe des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ telles que $f = F(x_1, \dots, x_n)$ avec F de classe C^r .

On a alors les propriétés immédiates suivantes qui utilisent le fait que si une fonction est de classe C^r sur un ouvert d'un espace affine, alors $f \circ \phi$ est de classe C^r pour tout difféomorphisme ϕ .

Proposition 20.2.2. Pour qu'une fonction soit de classe C^r au voisinage d'un point, il suffit de trouver une carte compatible avec la structure de variété telle que f est de classe C^r pour cette carte. En particulier, les coordonnées d'une carte sont des fonctions de classe C^∞ .

En particulier pour qu'une fonction F définie au voisinage de m soit C^r au voisinage de m , il suffit de trouver des coordonnées $X = (x_1, \dots, x_p)$ définies au voisinage de m , telle que la fonction f vérifiant $F = f(x_1, \dots, x_p)$ soit de classe C^r .

20.2.2 La différentielle d'une fonction

Ceci nous permet de définir la notion suivante.

Définition 20.2.3. Soit f une fonction de classe C^1 définie au voisinage d'un point m d'une variété. Nous dirons que f est de différentielle nulle en m si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes

1. Il existe des coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)$ tel que $f = F(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de m avec $d_{X(m)}F = 0$.
2. Pour toutes coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)$ si F est définie par $f = F(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de m alors $d_{X(m)}F = 0$.
3. il existe un entier k , des fonctions h_i, g_i s'annulant en m , dérivable en m et définies au voisinage de m pour $i \in \{1, \dots, k\}$, telle que au voisinage de m on ait

$$f = f(m) + \sum_{i=1}^{i=k} g_i h_i.$$

L'équivalence entre les deux premières propriétés est facile. La troisième est donnée simplement pour illustrer le fait que l'on peut se passer de coordonnées. Cette dernière caractérisation provient d'une formule de Taylor dans une carte.

Nous avons alors la proposition immédiate

Proposition 20.2.4. *L'espace $\mathcal{E}(m, U)$ des fonctions définies sur un voisinage U de m , nulle en m et de différentielle nulle est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{G}(m, U)$ des fonctions de classe C^1 s'annulant en m et définie sur U de m . De plus, si V est un voisinage de m inclus dans U , alors la restriction donne un isomorphisme de $\mathcal{G}(m, U)/\mathcal{E}(m, U)$ avec $\mathcal{G}(m, V)/\mathcal{E}(m, V)$.*

DÉMONSTRATION : le point délicat est la surjectivité de la restriction : elle s'obtient en utilisant une fonction cloche constante au voisinage de m et de support dans V . $\square$

Ceci nous permet de proposer la définition suivante

Définition 20.2.5. [ESPACE COTANGENT ET DIFFÉRENTIELLE] *Avec les notations de la proposition précédente, l'espace cotangent de la variété M en m , noté T_m^*M est l'espace vectoriel $\mathcal{G}(m, U)/\mathcal{F}(m, U)$. La différentielle d'une fonction f de classe C^1 définie au voisinage de m – notée $d_m f$ – est alors la classe de $f - f(m)$.*

On remarque en particulier que la différentielle d'une constante est nulle et que $d(fg) = f dg + g df$.

Le théorème suivant permet de comprendre ce qu'est l'espace cotangent et la différentielle d'une fonction.

Théorème 45. *Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage d'un point m . Alors $(d_m x_1, \dots, d_m x_n)$ est une base de T_m^*M . En particulier $\dim T_m^*M = \dim M$. De plus si $f = F(x_1, \dots, x_n)$, alors*

$$d_m f = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{X(m)} d_m(x_i).$$

20.2.3 Applications différentiables

Les fonctions de classe C^∞ vont nous permettre la notion d'application différentiable. Alternativement, nous verrons que tout peut se définir en fonction de cartes.

Définition 20.2.6. *Une application continue $\phi : M \rightarrow N$ entre variétés est de classe C^r si pour toute fonction ϕ de classe C^r au voisinage de $f(x)$, $\phi \circ f$ est de classe C^r au voisinage de x .*

Nous venons de voir que l'injection d'une sous-variété dans $\mathbb{R}^n$ est une application C^∞ . Nous déduisons immédiatement de cette définition que la composée d'applications de classe C^r est de classe C^r .

Alternativement, la caractérisation suivante est plus efficace.

Proposition 20.2.7. *Une application ϕ entre deux variétés est de classe C^r au voisinage de m , s'il existe des coordonnées X au voisinage de m , des coordonnées Y au voisinage de $f(m)$, telles que $X \circ \phi \circ Y^{-1}$ est de classe C^r .*

Par exemple, les coordonnées sont des exemples d'applications C^∞ , de même que les isométries locales entre surfaces hyperboliques.

Définition 20.2.8. *Si F est une application différentiable de M dans N . Son application cotangente au point x est l'application linéaire, notée T_x^*T , définie de $T_{F(x)}^*N$ dans T_x^*M par*

$$T_x^* f : d_{F(x)} g \mapsto d_x(g \circ F).$$

Nous remarquons que si π est un revêtement entre surfaces hyperboliques alors $T^* \pi$ est une application linéaire inversible.

20.3 Formes différentielles

20.3.1 Formes différentielles sur les variétés

Définition 20.3.1. [FORME DIFFÉRENTIELLE DE DEGRÉ 1] *Une 1-forme différentielle ou forme différentielle de degré 1 sur une variété M est une application $\omega : m \rightarrow \omega_m$ définie de M dans T^*M telle que pour tout m de M on a $\omega_m \in T_m^*M$.*

REMARQUES :

1. La différentielle d'une fonction f définie par

$$df : x \rightarrow d_x f,$$

est une 1-forme différentielle.

2. Si α et β sont deux 1-formes différentielles. La somme $\alpha + \beta$ définie par

$$\alpha + \beta : m \rightarrow \alpha_m + \beta_m$$

est une 1-forme différentielle.

3. Si f est une fonction et ω est une 1-forme différentielle le produit

$$f \cdot \omega : m \rightarrow f(m) \omega_m,$$

est également une 1-forme différentielle.

4. Si ω est une forme différentielle et $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage U d'un point m . Il existe des fonctions uniques ω_i définies sur U telles que

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i.$$

Cette dernière remarque nous permet de donner un sens à la notion de 1-forme différentiable.

Définition 20.3.2. [FORME DIFFÉRENTIELLE LISSE] Nous dirons qu'une 1-forme différentielle ω est de classe C^k au voisinage du point m , s'il existe des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ telles qu'au voisinage de m nous ayons

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i, \quad (20.1)$$

pour des fonctions f_i de classe C^k au voisinage de m . Nous dirons qu'une 1-forme différentielle est de classe C^k si elle est de classe C^k au voisinage de tout les points de la variété M .

Comme précédemment nous remarquons

REMARQUES :

1. La somme de deux 1-formes différentielles de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage d'un point.
2. Le produit d'une fonction et d'une forme de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage de ce point.
3. Si ω est de classe C^k au voisinage de m alors pour toutes coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage d'un point, nous avons

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i, \quad (20.2)$$

pour des fonctions f_i de classe C^k au voisinage de ce point.

Définition 20.3.3. Nous notons $\Omega^1(M)$ l'espace des formes différentielles de classe C^∞ sur M . L'espace $\Omega^1(M)$ est un espace vectoriel. La multiplication par les fonctions C^∞ lui donne la structure d'un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞ sur M .

Les différentielles de fonctions jouent un rôle particulier et nous dirons

Définition 20.3.4. [FORMES EXACTES, FORMES FERMÉES] Nous dirons qu'une 1-forme différentielle est exacte si elle est la différentielle d'une fonction. Une forme est fermée si au voisinage de tout point la différentielle d'une fonction. Deux formes fermées sont cohomologues si leur différence est exacte.

20.3.2 Intégration des formes différentielles sur les courbes

Définition 20.3.5. Une courbe c de classe C^1 est une application continue d'un intervalle I dans une variété M telle que pour tout t de I , il existe une carte (U, X) au voisinage de $c(t)$ telle que $X \circ c -$ définie sur un voisinage de t – est une courbe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 20.3.6. Soit f une fonction de classe C^1 et c une courbe, alors $f \circ c$ est de classe C^1 .

Définition 20.3.7. *Nous définissons alors*

$$\langle df|\dot{c}(t_0) \rangle = \left. \frac{df \circ c}{dt} \right|_{t=t_0}.$$

Les formes différentielles et les courbes sont reliées.

Proposition 20.3.8. *Soit c une courbe et f une fonction ω une forme différentielle qui s'écrit*

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=N} f_i dg_i,$$

alors le nombre réel

$$\sum_{i=1}^{i=N} f_i \langle dg_i|\dot{c}(t) \rangle,$$

ne dépend que de ω , c et t . On le note

$$\omega(\dot{c}(t)).$$

De plus la fonction $t \mapsto \langle \omega(\dot{c}(t)) \rangle$ est continue.

Nous pouvons alors intégrer les fonctions le long des courbes

Définition 20.3.9. *L'intégrale de la forme ω sur la courbe c est*

$$\int_c \omega := \int_0^1 \langle \omega|\dot{c}(t) \rangle dt.$$

Nous vérifions que si f est une fonction alors

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

En particulier, si c est un *lacet*, c'est-à-dire si $c(a) = c(b)$, alors pour toute forme $\omega = df$ nous avons

$$\int_c \omega = 0.$$

Nous en déduisons qu'il existe des formes différentielles qui sont fermées sans être exactes. Ainsi la forme définies sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx,$$

est fermée et non exacte. Pour ce dernier point, nous avons en effet que si c est le lacet $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, défini par $c(t) = e^{2i\pi t}$ alors

$$\int_c \omega = 2\pi.$$

20.3.3 Premier groupe d'homologie

Définition 20.3.10. [COHOMOLOGIE] Soit M une variété. Son premier groupe de cohomologie est l'espace vectoriel

$$H^1(M, \mathbb{C}) = \text{Fer}(M)/\text{Ex}(M),$$

où $\text{Fer}(M)$ désigne l'espace vectoriel des formes fermées sur M et $\text{Ex}(M)$ celui des formes exactes sur M . Autrement dit, $H^1(M, \mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des classes de cohomologies de formes fermées.

20.3.4 Lemme d'homotopie

Nous avons le résultat important suivant

Lemme 20.3.11. Soit c_0 et c_1 deux chemins homotopes à extrémités fixées. Soit ω une forme fermée alors

$$\int_{c_0} \omega = \int_{c_1} \omega.$$

20.3.5 Formes fermées et groupe fondamental

Nous en déduisons le résultat suivant.

Proposition 20.3.12. Soit ω une forme abélienne sur une surface S . Alors l'application $\widehat{\omega}$ de $\pi_1(S, s)$ dans $\mathbb{C}$ définit par

$$[c] \mapsto \widehat{\omega}(c) = \int_c \omega,$$

est un homomorphisme de groupe.

Définition 20.3.13. [PÉRIODE] Si c est un lacet et ω une forme fermée la quantité

$$\int_c \omega,$$

s'appelle la période de ω

20.3.6 Le théorème d'Hurewicz

Le théorème d'Hurewicz précise la relation entre groupe fondamental et groupe d'homologie.

Théorème 46. Soit M une variété, alors l'application définie de

$$H^1(M) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(M, \mathbb{C}),$$

which associates to $[\omega]$ the homomorphism

$$c \mapsto \int_c \omega,$$

is well defined and a linear isomorphism.

Part III

Groupe fondamental et revêtements

Chapter 21

Les applications à valeurs dans dans le cercle

21.1 Motivation

Question 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t \mapsto c(t)$, $I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ une courbe continue dans le plan qui évite l'origine. On note $r(t) \in]0, +\infty[$, $\tilde{\theta}(t) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ses coordonnées polaires. Peut-on choisir une fonction continue $t \mapsto \theta(t)$, $I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\theta(t) \in \tilde{\theta}(t)$ pour tout t ?

Question 2. Supposons que $I = \mathbb{R}$ et que c est 2π -périodique. Peut-on choisir la fonction continue $t \mapsto \theta(t)$ 2π -périodique ?

Question 3. La fonction holomorphe $z \mapsto 1/z$, $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Rappel : détermination principale du logarithme

Définition 21.1.1. La détermination principale du logarithme est la fonction holomorphe Log définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, qui vaut 0 en 1 et dont la dérivée est $z \mapsto 1/z$.

On la calcule en intégrant $1/z$ le long d'arcs évitant $\mathbb{R}_-$. On trouve que si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors

$$\text{Log}(z) = \log(r) + i\theta.$$

Le fait que les limites par le haut et par le bas de Log en un point de $\mathbb{R}_-$ sont distinctes entraîne que $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Donc la réponse à la question 3 est négative.

Cela entraîne que la réponse à la question 2 est négative elle-aussi.

EXEMPLE : Soit $c(t) = e^{it} \in \mathbb{C}$, qu'on identifie à $\mathbb{R}^2$. Alors $r(t) = 1$ pour tout t et il n'existe pas de fonction continue 2π -périodique $t \mapsto \theta(t)$ telle que $c(t) = e^{i\theta(t)}$.

En effet, sinon, la formule $\text{my} - \log(re^{it}) = \log(r) + i\theta(t)$ définirait une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $e^{\text{my} - \log(z)} = z$. Le théorème d'inversion locale, appliqué à la fonction exponentielle, entraînerait que $\text{my} - \log$ est holomorphe, de dérivée $1/z$, contradiction.

21.2 Le théorème de relèvement

Théorème 47. On note $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$. Soit $t \mapsto u(t)$, $I \rightarrow U$ une application continue. Soit θ_0 un réel tel que $e^{i\theta_0} = u(t_0)$. Il existe une unique fonction continue $t \mapsto \theta(t)$, $I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $e^{i\theta(t)} = u(t)$ pour tout $t \in I$ et $\theta(t_0) = \theta_0$.

DÉMONSTRATION : L'unicité est facile : deux solutions diffèrent d'une fonction continue à valeur dans $2\pi\mathbb{Z}$, nécessairement constante, en fait nulle puisqu'elle s'annule en t_0 .

Supposons d'abord qu'il existe un point $v \in U$ qui n'est pas dans l'image de u . Si $v = -1$, posons $\theta_v(t) = -i\text{Log}(u(t))$. Si $v \neq -1$, posons $\theta_v(t) = -i\text{Log}(-u(t)/v) - i\text{Log}(v) - i\pi$. Dans les deux cas, $e^{i\theta_v(t)} = u(t)$ pour tout $t \in I$. En particulier, $e^{i\theta_v(t_0)} = u(t_0)$, donc il suffit d'ajouter un multiple entier de 2π à θ_v pour que $\theta(t_0) = \theta_0$.

Passons au cas général. Soit $T = \sup\{s \in I \mid \text{il existe une solution définie sur } [t_0, s]\}$ (éventuellement, $T = +\infty$). Supposons que $T \in I$. Soit $v \in U$ un point distinct de $u(T)$. Par continuité de u , il existe $\epsilon > 0$ tel que u ne prenne pas la valeur v sur $]T - \epsilon, T + \epsilon[\cap I$. Par définition de T , il existe un $t > T - \epsilon$ et une solution θ_s définie sur $[t_0, s]$. Alors $e^{i\theta_s(s)} = u(s) = e^{i\theta_v(s)}$, donc il existe un entier n tel que $\theta_s(s) - \theta_v(s) = 2\pi n$. On prolonge θ_s par continuité en posant $\theta(t) = \theta_v(s) + 2\pi n$ pour $t \in [s, T + \epsilon[\cap I$. On obtient une solution définie sur $[t_0, T + \epsilon[\cap I$. Ceci contredit le choix de T . On conclut que $T \notin I$, donc la moitié du contrat est remplie. En faisant le même travail à gauche de t_0 , on construit le relèvement souhaité sur I entier. $\square$

Moralité. On a utilisé la propriété suivante de la paramétrisation exponentielle $\mathbb{R} \rightarrow U$ du cercle unité : au voisinage de chaque point de U , on dispose d'une famille d'applications réciproques continues dont les images recouvrent l'image réciproque du voisinage. Cette propriété caractérise les revêtements, on y reviendra.

21.3 Degré

Retour à la question 2. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow U$ une application 2π -périodique. Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un relèvement de u . Alors $t \mapsto \theta(t + 2\pi)$ est un autre relèvement de u , donc il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2\pi n$. L'exemple de la paramétrisation exponentielle elle-même ($\theta(t) = t$) montre que n n'est pas toujours nul.

Définition 21.3.1. Soit $f : U \rightarrow U$ une application continue, soit θ un relèvement de $t \mapsto f(e^{it})$. On appelle degré de f l'entier $n = \deg(f)$ tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2\pi n$.

EXEMPLE : Le degré de $z \mapsto z^n$ est n .

Proposition 21.3.2. Si deux applications f et $g : U \rightarrow U$ sont telles que pour tout s , $|f(s) - g(s)|$ est strictement plus petit que 2, elles ont même degré.

DÉMONSTRATION : Supposons que $|f - g| < 2$. Soit $\theta_f, \theta_g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des relèvements de f et g . On peut les choisir de sorte que $|\theta_f(0) - \theta_g(0)| < \pi$. Supposons que $s = \inf\{t >$

$0 \leq |\theta_f(t) - \theta_g(t)| \geq \pi$ est fini. Alors $|\theta_f(s) - \theta_g(s)| = \pi$, ce qui contredit $|f(s) - g(s)| < 2$. Par conséquent, pour tout $t > 0$, $|\theta_f(t) - \theta_g(t)| < \pi$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 2k\pi|\deg(f) - \deg(g)| - |\theta_f(0) - \theta_g(0)| &\leq |\theta_f(0) - \theta_g(0) + 2k\pi(\deg(f) - \deg(g))| \\ &\leq |\theta_f(2k\pi) - \theta_g(2k\pi)| < \pi, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\deg(f) = \deg(g)$. $\square$

21.3.1 Degré des applications différentiables

Rappel 21.3.3. On dit que $f : U \rightarrow U$ est de classe C^k si $g(t) = f(e^{it})$ définit une application de classe C^k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Proposition 21.3.4. Soit $f : U \rightarrow U$ une application de classe C^1 . Posons $g(t) = f(e^{it})$. Alors

$$\deg(f) = \int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{i g(t)} dt.$$

DÉMONSTRATION : Soit θ un relèvement de g , i.e. $g(t) = e^{i\theta(t)}$. Alors θ est dérivable, et $\frac{g'(t)}{g(t)} = i\theta'(t)$, d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{i g(t)} dt = \int_0^{2\pi} \theta'(t) dt = \theta(2\pi) - \theta(0) = \deg(f).$$

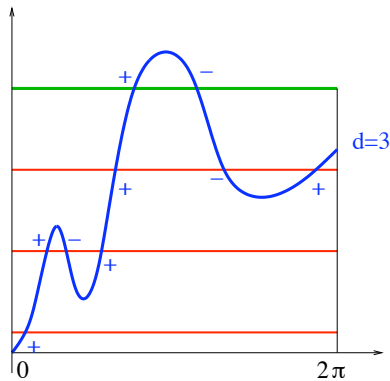
$\square$

Proposition 21.3.5. Soit $f : U \rightarrow U$ une application de classe C^1 . Soit $u \in U$ tel que pour tout $v \in U$ tel que $f(v) = u$, la dérivée de f en v est non nulle. Elle possède un signe, $\epsilon(v) = +1$ si la vitesse va dans le sens trigonométrique, $\epsilon(v) = -1$ sinon. Alors

$$\deg(f) = \sum_{v \in f^{-1}(u)} \epsilon(v).$$

DÉMONSTRATION : La somme est finie, car l'ensemble $f^{-1}(u)$ est discret (chacun de ses points est isolé) donc fini. En effet, soit θ un relèvement de f , $f(e^{it}) = e^{i\theta(t)}$, et soit $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ tel que $u = e^{i\theta_0}$. Par hypothèse, pour tout t tel que $\theta(t) = \theta_0 \bmod 2\pi$, $\theta'(t) \neq 0$, donc t est isolé.

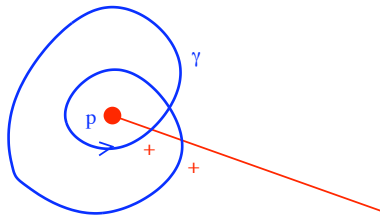
Notons $d = \deg(f)$. Quitte à translater le temps, on peut supposer que $\theta(0) = 0$ et $\theta_0 \neq 0$. Lorsque t varie de 0 à 2π , la fonction θ croise chacun des niveaux $\theta_0 + 2k\pi$, $k = 0, \dots, d-1$ un nombre fini de fois, avec une dérivée positive ou négative, mais la somme des signes vaut 1. Pour un niveau $\theta_0 + 2k\pi$, où k n'est pas compris entre 0 et $d-1$, la somme des signes vaut 0. Par conséquent, la somme des signes des dérivées à toutes les traversées des niveaux $\theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vaut d . Or cette somme coïncide avec celle de l'énoncé. $\square$



21.3.2 Indice

Définition 21.3.6. Soit $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe dans le plan qui évite un point p . On appelle indice de γ par rapport à p le degré de l'application $u \mapsto \frac{\gamma(u) - p}{|\gamma(u) - p|}$.

Autrement dit, l'indice de γ par rapport à p , c'est le nombre de tours que γ fait autour de p . On peut le calculer en coupant γ par une demi-droite bien choisie : on compte le nombre de fois que γ coupe la demi-droite dans le sens trigonométrique, moins le nombre de fois que γ coupe la demi-droite dans l'autre sens.



Chapter 22

Groupe fondamental

22.1 Chemins et lacets

22.1.1 Définitions

Définition 22.1.1. Soit X un espace topologique. Un chemin dans X est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$, on parle de lacet, basé au point $x = \gamma(0) = \gamma(1)$.

Dans le cas où X est le cercle U , on définit le degré du lacet α par la formule

$$\deg(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\eta(1) - \eta(0)),$$

où $\alpha = e^{i\eta}$. On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de η .

22.1.2 Composition et inverse

Définition 22.1.2. [COMPOSITION] Si $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ sont des chemins tels que $\beta(0) = \alpha(1)$, leur composition est le chemin noté $\alpha \cdot \beta$ tel que

$$\begin{cases} \alpha \cdot \beta(t) = \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \alpha \cdot \beta(t) = \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Proposition 22.1.3. Si $X = U$ alors

$$\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta).$$

DÉMONSTRATION : En effet supposons $\alpha = e^{i\theta}$ et $\beta = e^{i\eta}$ tels que $\theta(0) = \eta(0)$. Nous pouvons alors écrire $\alpha \cdot \beta = e^{i\xi}$ où

$$\begin{cases} \xi(t) = \theta(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \xi(t) = \eta(2t - 1) + \deg(\alpha)2\pi & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

On vérifie que ξ est continue et que $\xi(1) - \xi(0) = 2\pi(\deg(\alpha) + \deg(\beta))$. □

Définition 22.1.4. [INVERSE] L'inverse d'un chemin α , noté α^{-1} , est défini par

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t).$$

EXERCICE : Si $X = U$ alors

$$\deg(\alpha^{-1}) = -\deg(\alpha).$$

22.2 Homotopie

Deux chemins sont homotopes si on peut les déformer continûment l'un en l'autre.

Définition 22.2.1. Soit $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ des chemins de mêmes extrémités x_0 et x_1 . On dit que α et β sont homotopes (à extrémités fixées), et on note $\alpha \sim \beta$, s'il existe une application continue $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ – appelée homotopie – telle que

$$\begin{aligned} F(0, t) &= \alpha(t), \\ F(1, t) &= \beta(t), \\ F(s, 0) &= x_0, \quad F(s, 1) = x_1. \end{aligned}$$

Notre premier lemme explique que deux paramétrisations différentes donne deux chemins homotopes.

Lemme 22.2.2. Soit α et β deux chemins. On suppose qu'il existe une application continue h de $[0, 1]$ dans lui-même tel que $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$ et $\alpha = \beta \circ h$. Alors α et β sont homotopes.

22.2.1 Exemples d'homotopie

Voici deux exemples concernant des espaces topologiques particuliers.

Proposition 22.2.3. Si X est un convexe d'un espace affine, alors deux chemins quelconques ayant les mêmes extrémités sont homotopes.

Proposition 22.2.4. Soit α un chemin et h une application continue de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$ alors $\alpha \circ h$ est homotope à α .

Proposition 22.2.5. Si $X = U$, deux lacets sont homotopes si et seulement si ils ont le même degré.

DÉMONSTRATION : Supposons tout d'abord que α et β sont homotopes par une application H . Par définition pour tout s , l'application $H_s : t \rightarrow H(s, t)$ est un lacet. Par uniforme continuité de H , il existe $\epsilon > 0$ tel que $|s - s'| \leq \epsilon$ entraîne $|H_s(t) - H_{s'}(t)| \leq 1$. En particulier, d'après la proposition 21.3.2, $\deg(H_s) = \deg(H_{s'})$. La fonction $s \rightarrow \deg(H_s)$ est localement constante donc constante. En particulier $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$.

Réciproquement, supposons $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$. Nous pouvons écrire $\alpha = e^{i\theta}$ et $\beta = e^{i\eta}$ tels que $\theta(0) = \eta(0)$. Puisque $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$, nous avons également $\theta(1) = \eta(1)$. Nous pouvons alors définir une homotopie entre α et β par

$$H(s, t) = e^{i((1-s)\theta(t) + s\eta(t))}.$$

□

22.3 Simple connexité

Définition 22.3.1. On dit qu'un espace topologique X est simplement connexe si il est connexe et si tout lacet est homotope à un lacet constant.

22.3.1 Premiers exemples

Nous avons déjà montrer les deux propositions suivantes.

Proposition 22.3.2. Si X est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, alors X est simplement connexe.

Proposition 22.3.3. Le cercle U n'est pas simplement connexe.

22.4 Propriétés de l'homotopie et groupe fondamental

22.4.1 Propriétés fondamentales

Par la suite il ne sera pas toujours utile de construire explicitement les homotopies. Les propriétés suivantes nous permettront de montrer l'homotopie de nombreux chemins

Proposition 22.4.1. Si x_0 est un point de X , on note par x_0 le chemin constant égale à x_0

- (i) Si α est homotope à β , alors β est homotope à α .
- (ii) Si α est homotope à β et β à γ , alors α est homotope à γ .
- (iii) Si α est homotope à α' et β à β' , alors $\alpha.\beta$ est homotope à $\alpha'.\beta'$.
- (iv) Le chemin α est homotope à $\alpha.\alpha(1)$ et à $\alpha(0).\alpha$.
- (v) Le lacet $\alpha.\alpha^{-1}$ est homotope à $\alpha(0)$.
- (vi) Le chemin $(\alpha.\beta).\gamma$ est homotope à $\alpha.(\beta.\gamma)$.

DÉMONSTRATION : Pour les propriétés (iv,v,vi), on utilisera avec profit la proposition 22.2.4.

□

Nous en déduisons immédiatement

Corollaire 22.4.2. Etre homotope est une relation d'équivalence.

22.4.2 Le groupe fondamental

Nous déduisons immédiatement des propriétés prouvées dans la proposition 22.4.1.

Théorème 48. Soit $x \in X$. Soit $\pi_1(X, x)$ l'ensemble des classes d'homotopie (à extrémités fixées) de lacets basés en x . La composition des lacets induit sur $\pi_1(X, x)$ une structure de groupe.

Définition 22.4.3. On appelle $\pi_1(X, x)$ le groupe fondamental de X .

22.4.3 Exemples

Nous pouvons énoncer de manière plus savante nos diverses remarques sur le degré des lacets dans le cercle.

Proposition 22.4.4. *Le groupe fondamental du cercle unité $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}$. L'isomorphisme est donné par le degré $\deg : \pi_1(U, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$.*

Proposition 22.4.5. *Soit S^n la sphère de dimension n . Si $n \geq 2$, alors S^n est simplement connexe.*

DÉMONSTRATION : Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^n$ un lacet. Nous appellerons *cercle* l'intersection d'un plan de dimension deux avec la sphère.

PREMIER CAS. Supposons que γ évite au moins un point $u \in S^n$. Comme $S^n \setminus \{u\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, γ est homotope à une constante dans $S^n \setminus \{u\}$, et *a fortiori* dans S^n . Plus généralement, le même raisonnement montre que tout chemin évitant un point est homotope à un chemin tracé sur un cercle.

CAS GÉNÉRAL. Pour se ramener au premier cas, on montre que γ est homotope à un lacet qui évite un point. Par continuité uniforme, il existe un entier N tel que si $|t' - t| \leq 1/N$, alors $|\gamma(t') - \gamma(t)| < 1$. En particulier, le chemin γ_i qui est la restriction de γ à l'intervalle $[i/N, (i+1)/N]$ évite le point $-\gamma(t_i)$. Le chemin γ_i est donc homotope à un chemin tracé sur un cercle. Le chemin γ est alors lui aussi homotope à un chemin tracé sur une réunion finie de cercles. Si $n \leq 2$ alors. Cette réunion finie de cercles évite un point. $\square$

Proposition 22.4.6. *Soit X, Y des espaces topologiques, $x \in X, y \in Y$. Alors*

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) = \pi_1(X, x) \oplus \pi_1(Y, y).$$

En particulier, le groupe fondamental du tore $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est $\mathbb{Z}^n$.

DÉMONSTRATION : Un lacet basé en (x, y) dans $X \times Y$, c'est un couple d'un lacet de X basé en x et d'un lacet de Y basé en y . Les homotopies aussi sont des couples d'homotopies, donc les classes d'homotopie sont des couples de classes.

Enfin, $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = (\mathbb{R} / \mathbb{Z})^n$. $\square$

Chapter 23

Type d'homotopie

23.1 Homotopie entre applications

Définition 23.1.1. Soit X, Y des espaces topologiques. Deux applications continues f_0 et $f_1 : X \rightarrow Y$ sont homotopes s'il existe une homotopie de f_0 à f_1 , i.e. une application continue $F : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ telle que $F(0, \cdot) = f_0$ et $F(1, \cdot) = f_1$. On le note $f_0 \sim f_1$.

C'est une relation d'équivalence et on note $[X, Y]$ l'espace des classes d'homotopies d'applications de X dans Y .

23.1.1 Le cas du cercle

Toute application continue γ du cercle U dans X donne naissance à un lacet $\tilde{\gamma}$ basé en $\gamma(1)$ par $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(e^{2\pi it})$. Réciproquement, si $\tilde{\gamma}$ est un lacet, il existe une application continue γ de U dans X telle que $\gamma(e^{2\pi it}) = \tilde{\gamma}(t)$.

Pour éviter la confusion sur le sens du mot "homotope", nous préciserons soit *homotopie à base fixées* – en tant que lacet basé en un point – soit *homotopie libre* – c'est à dire en tant qu'application de U dans X . Notons par ailleurs D le disque unité

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Nous avons alors les équivalences suivantes en utilisant les notations précédentes

Proposition 23.1.2. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes

- (i) Le lacet $\tilde{\gamma}$ est homotope à base fixée au lacet constant.
- (ii) L'application γ est homotope librement à une application constante.
- (iii) L'application γ s'étend en une application F de D dans X , c'est-à-dire $F|_U = \gamma$.

ATTENTION Il existe des lacets qui sont homotopes librement pas mais pas homotopes à base fixée.

DÉMONSTRATION : L'implication (i) donne (ii) est facile. En effet si H est l'homotopie à base fixée de $\tilde{\gamma}$ vers le lacet constant, l'application $g : G(s, e^{2\pi it}) = H(s, t)$ réalise une homotopie libre entre $\tilde{\gamma}$ et l'application constante $\gamma(0)$.

Supposons maintenant (ii) et montrons (iii). Soit G l'homotopie libre entre l'application constante x_0 et γ . On construit une application du disque D par

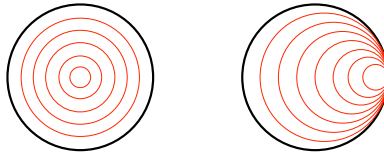
$$F(0) = x_0, \quad F(z) = G(|z|, \frac{z}{|z|}),$$

et on vérifie en exercice que F est bien continue.

Supposons enfin (iii) et montrons (i), on utilise l'homothétie de centre 1 et de rayon s $z \rightarrow s(1 - z) + 1$ pour construire

$$H(s, t) = G(s(e^{2i\pi t} - 1) + 1),$$

qui réalise une homotopie à base fixée entre le lacet constant $\gamma(1)$ et $\tilde{\gamma}$. □



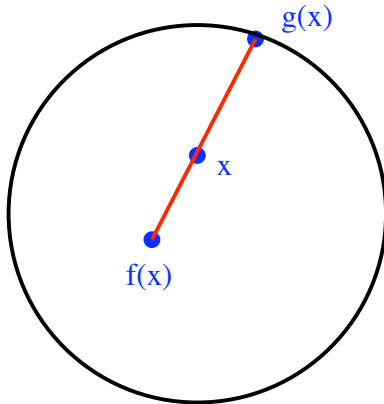
23.1.2 Applications

Théorème 49. [L.E.J. BROUWER, 1909]. Soit $\bar{D}$ le disque unité fermé du plan. Toute application continue $\bar{D} \rightarrow \bar{D}$ possède un point fixe.

DÉMONSTRATION : Par l'absurde. Supposons qu'il existe une application continue $f : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ sans point fixe. Considérons l'application $g : \bar{D} \rightarrow U$ qui à $x \in \bar{D}$ associe le point d'intersection $g(x)$ de la demi-droite d'origine $f(x)$ passant par x . g est continue. En effet, $g(x)$ est caractérisé par une condition fermée

$$\begin{cases} \det(\overrightarrow{f(x)z}, \overrightarrow{f(x)x}) = 0, \\ \overrightarrow{f(x)z} \cdot \overrightarrow{f(x)x} \geq 0. \end{cases}$$

Si x_j est une suite tendant vers x , toute sous-suite convergente de $g(x_j)$ doit converger vers $g(x)$. Par conséquent, $g(x_j)$ converge vers $g(x)$.



Posons, pour $s \in [0, 1]$ et $u \in U$, $F(s, u) = g(su)$. Alors $F(0, \cdot) = g(0)$ est constante, et $F(1, \cdot)$ est l'identité. Par conséquent, l'identité $U \rightarrow U$ est homotope à une constante. Or le degré de l'identité vaut 0, alors que celui d'une application constante vaut 0, contradiction. $\square$

REMARQUES : Le théorème est vrai en toutes dimensions. Brouwer a traité le cas $n = 3$ en 1919, le cas général est dû à J. Hadamard.

J'ignore l'histoire du cas $n = 2$. Pour généraliser la preuve aux dimensions supérieures, il faut un invariant d'homotopie (groupe d'homotopie ou d'homologie) en chaque dimension, alors que le groupe fondamental ne capture que des propriétés unidimensionnelles.

Corollaire 23.1.3. *Quand on est à Paris et qu'on déplie un plan de Paris, il y a un point du plan qui est exactement à sa position réelle dans Paris.*

Théorème 50. [JEAN LE ROND D'ALEMBERT, CARL FRIEDRICH GAUSS]. *Tout polynôme à coefficients complexes, de degré non nul, possède au moins une racine complexe.*

Ce théorème fut énoncé par D'Alembert au XVIII^{ème} dans l'Encyclopédie puis démontré par Gauss au XIX^{ème}.

DÉMONSTRATION : Par l'absurde. Supposons qu'il existe un polynôme f de degré d à coefficients complexes, qui ne s'annule pas. Il ne coûte rien de supposer que le coefficient directeur de f vaut 1. Considérons l'application $]0, 1[\rightarrow U$ définie par

$$dg(s, u) = \frac{f(u \frac{1-s}{s})}{|f(u \frac{1-s}{s})|}.$$

Lorsque s tend vers 0, $g(s, u)$ tend vers u^d . Lorsque s tend vers 1, $g(s, u)$ tend vers $\frac{f(0)}{|f(0)|}$. Par conséquent, g se prolonge en une application continue $G : [0, 1] \times U \rightarrow U$, qui est une homotopie entre la constante $\frac{f(0)}{|f(0)|}$ et l'application $u \mapsto u^d$. Si $d \neq 0$, c'est incompatible avec l'invariance homotopique du degré. $\square$

23.1.3 Equivalences d'homotopie

Définition 23.1.4. *Une équivalence d'homotopie entre X et Y , c'est une application continue $f : X \rightarrow Y$ telle qu'il existe une application continue $g : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes à l'identité. S'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y , on dit que X et Y ont même type d'homotopie.*

C'est une relation d'équivalence.

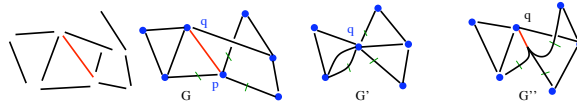
EXEMPLE : $\mathbb{R}^n$ a même type d'homotopie qu'un espace $*$ réduit à un point (on dit qu'il est contractile).

En effet, soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow *$ l'application constante, et $g : * \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application dont l'image est 0. Alors $g \circ f = id_*$, $f \circ g$ est la fonction nulle, homotope à l'identité par $F(s, x) = sx$. $\square$

EXEMPLE : Soit X, Y des espaces topologiques. Si X a même type d'homotopie que X' , alors $X \times Y$ a même type d'homotopie que $X' \times Y$. En particulier, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a même type d'homotopie que le cercle unité U .

Proposition 23.1.5. *Soit G un graphe fini, i.e. l'espace topologique obtenu à partir d'une réunion disjointe finie de copies de l'intervalle $[0, 1]$ en identifiant des extrémités. Soit a une arête, i.e. un des intervalles constituant G . On suppose que les extrémités de a sont distinctes dans G . Soit G' le graphe obtenu en écrasant a , i.e. en identifiant tous les points de a . Alors G et G' ont même type d'homotopie.*

DÉMONSTRATION : Notons $f : G \rightarrow G'$ le passage au quotient. Pour construire son inverse g , montrons que G peut être vu comme un quotient de G' . Notons p et $q \in G$ les extrémités de l'arête écrasée. Notons $a = pq, a_1, \dots, a_k$ les arêtes dont l'une des extrémités est p . Si une arête a a ses deux extrémités égales à p , on la compte deux fois. Paramétrons chacune d'entre elles par $t \mapsto a_i(t), t \in [0, 1]$, de sorte que p corresponde au paramètre 0. Si une arête a a ses deux extrémités égales à p , on la paramètre deux fois, une fois dans chaque sens, i.e. $a_j(t) = a_i(1 - t)$. Pour chaque $t \in [0, 1/3]$, identifions les points $a_1(t), \dots, a_k(t)$. On obtient un espace G'' homéomorphe à G . On note $g : G' \rightarrow G'' \rightarrow G$ le passage au quotient suivi de l'homéomorphisme, qui étire un tiers d'arête (obtenu par identification du premier tiers des a_i) en l'arête a entière. C'est l'inverse homotopique de f .



Considérons l'application $F_s : G \mapsto G$ qui est l'identité en dehors des arêtes contenant p , envoie $a(t)$ en $a(s + (1 - s)t)$, $a_i(t)$ en $a_i(2st - s + t)$ pour $t \leq s/1 + 2s$, $a_i(t)$ en $a_i(2st - s + t)$ pour $s/1 + 2s \leq t \leq \frac{1}{2}$, sans rien changer si $t \geq \frac{1}{2}$, sauf pour les arêtes a_i ayant leurs deux extrémités en p , pour lesquelles les points $a_i(t) = a_j(1 - t)$ subissent le traitement prescrit aussi pour $t \geq \frac{1}{2}$. Alors F est une homotopie de l'identité à $g \circ f$.

Considérons l'application $H_s : G' \mapsto G'$ qui est l'identité en dehors des arêtes a_i , envoie $a_i(t)$ en $a_i(0)$ pour $t \leq s/1 + 2s$, $a_i(t)$ en $a_i(2st - s + t)$ pour $s/1 + 2s \leq t \leq \frac{1}{2}$, sans rien changer si $t \geq \frac{1}{2}$, sauf pour les arêtes a_i ayant leurs deux extrémités en p , pour lesquelles les points $a_i(t) = a_j(1 - t)$ subissent le traitement prescrit aussi pour $t \geq \frac{1}{2}$. Alors H est une homotopie de l'identité à $f \circ g$. $\square$

Corollaire 23.1.6. *Tout graphe fini connexe a même type d'homotopie qu'un graphe n'ayant qu'un sommet auquel sont attachées un nombre fini de boucles.*

DÉMONSTRATION : On écrase l'une après l'autre toutes les arêtes dont les extrémités sont distinctes. A la fin, il ne reste que des boucles attachées au même sommet. $\square$

23.1.4 Homotopie et groupes fondamentaux

Nous devons tout d'abord examiner ce qui se passe lorsque l'on change de point base. Soit α un chemin allant de x à y , nous laissons en exercice la proposition suivante.

Proposition 23.1.7. *L'application α_* de $\pi_1(X, x)$ dans $\pi_1(X, y)$ définie par $\alpha_*([\gamma]) = [\alpha^{-1} \cdot \gamma \alpha]$ est bien définie et est un isomorphisme. De plus,*

- la composition des chemins donne la composition des morphismes, $\alpha_{\#} \circ \beta_{\#} = (\alpha.\beta)_{\#}$,
- si α est homotope à β , alors $\alpha_{\#} = \beta_{\#}$.

En particulier si X est un espace topologique connexe par arcs, alors pour tous $x, x' \in X$, les groupes $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, x')$ sont isomorphes. De façon un peu abusive, on note tous ces groupes $\pi_1(X)$.

Nous allons maintenant pouvoir préciser le lien entre homotopie entre applications continues.

Proposition 23.1.8. *Toute application continue $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme de groupe $f_{\#} : \pi_0(X, x) \rightarrow \pi_0(Y, f(x))$ donné par $f_{\#}([\gamma]) = [f \circ \gamma]$.*

- (i) De plus $(f \circ g)_{\#} = f_{\#} \circ g_{\#}$.
- (ii) Si f est homotope à g par une application H , alors $g_{\#} = \alpha_{\#} \circ f_{\#}$, où α est le lacet joignant $f(x)$ à $g(x)$ donné par $\alpha(s) = H(s, t)$.

DÉMONSTRATION : Le point délicat est le dernier point. Donnons tout d'abord l'idée. Notons f_s l'application $t \rightarrow H(s, t)$. Pour tout lacet γ , nous devons réaliser une homotopie entre le lacet $\alpha^{-1}.f(\gamma).\alpha$ et le lacet $g(\gamma)$. L'idée est de construire une déformation de telle sorte que le lacet déformé au temps s est obtenu en suivant α^{-1} jusqu'au temps s , puis $f_s \circ \gamma$ puis enfin α à partir du temps s .

Considérons pour cela le carré $[0, 1]^2$. Le bord du carré est composé de quatre chemins orienté par le sens direct :

- Le côté bas c_{bas} qui va de $(0, 0)$ à $(1, 0)$.
- Le côté droit c_{droit} qui va de $(1, 0)$ à $(1, 1)$.
- Le côté haut c_{haut} qui va de $(1, 1)$ à $(0, 1)$.
- Le côté gauche c_{gauche} qui va de $(0, 1)$ à $(0, 0)$.

D'après la proposition 22.2.3 appliquée au convexe $[0, 1]^2$, le chemin c_{droit} est homotope par une homotopie G à extrémités fixées au le chemin $(c_{\text{haut}}^{-1}.c_{\text{gauche}}^{-1}).c_{\text{bas}}^{-1}$.

Ensuite posons $W(s, t) = H(s, \gamma(t))$. On remarque que $W \circ c_{\text{droit}}^{-1}$ est le lacet $g \circ \gamma$, le lacet $w((c_{\text{bas}}.c_{\text{droit}}).c_{\text{haut}})$ est le lacet $(\alpha^{-1}.f(\gamma)).\alpha$.

L'homotopie $F(s, t) = W(G(s, t))$ réalise alors l'homotopie à base fixée que nous recherchons. $\square$

Corollaire 23.1.9. *Si X et Y ont même type d'homotopie et sont connexes par arcs, alors $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ sont isomorphes. En particulier, la simple connexité est un invariant d'homotopie.*

DÉMONSTRATION : on utilise le fait algébrique que si $F : A \rightarrow B$ et $G : B \rightarrow A$ sont des morphismes de groupes et si $F \circ G$ de même que $G \circ F$ est un isomorphisme alors F et G sont des isomorphismes. $\square$

Corollaire 23.1.10. $S^1 = U$ n'a pas même type d'homotopie que S^n ou $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ pour $n \geq 2$.

Corollaire 23.1.11. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes.

23.1.5 Rétraction par déformation

Définition 23.1.12. Soit X un espace topologique et $Y \subset X$ un sous-espace. Une rétraction $r : X \rightarrow Y$ est une application continue qui fixe chaque point de Y . Une rétraction par déformation de X sur Y , c'est une rétraction $r : X \rightarrow Y$ qui est homotope à l'identité parmi des applications qui fixent chaque point de Y .

REMARQUES : Si Y est un rétracte par déformation X , il a même type d'homotopie que X .

EXEMPLE : $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se rétracte par déformation sur S^{n-1} .

DÉMONSTRATION : Poser $dF(s, x) = \frac{x}{s|x|+1-s}$. □

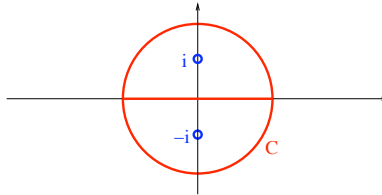
Proposition 23.1.13. Soit $p \in \mathbb{R}^2$. Soit $\ell \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la droite à l'infini. Alors ℓ est un rétracte par déformation de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{p\}$.

DÉMONSTRATION : Soit $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{p\} \rightarrow \ell$ la projection de centre p sur ℓ . Alors π est une rétraction. Chaque fibre $\pi^{-1}(q)$, $q \in \ell$ est une droite projective avec un point marqué (q) et un point retiré (p), elle possède donc une structure canonique de droite vectorielle. On peut donc multiplier un point $r \in \pi^{-1}(q)$ par $s \in \mathbb{R}$. L'application $F(s, r) = sr$ définit une homotopie de π à l'identité à travers des rétractions.

Concrètement, si $p = [0 : 0 : 1]$, $r = [x_0 : x_1 : x_2]$, $\pi(r) = [x_0 : x_1 : 0]$, et on pose $F(s, r) = [x_0 : x_1 : sx_2]$. □

Corollaire 23.1.14. Le complémentaire d'un disque dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ n'est pas homéomorphe à un disque. En fait, il n'a pas le même type d'homotopie.

EXEMPLE : $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ a même type d'homotopie que la réunion du cercle de rayon 2 centré en 0 et de l'intervalle $[-2, 2]$ de l'axe réel.



En effet, notons $B = \bar{B}(0, 2) \setminus \{-i, i\}$. Alors B est un rétracte par déformation de $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. La rétraction ρ envoie un point z du complémentaire de B sur $2z/|z|$. La déformation ρ_s envoie z sur $(1-s)z + s\rho(z)$.

Notons $C = [-2, 2] \cup \{|z| = 2\}$. Alors B se rétracte par déformation sur C . Dans chacune des moitiés de B , la rétraction r envoie un point z sur le premier point d'intersection de la demi-droite iz (resp. $(-i)z$) avec C . La déformation r_s envoie z sur $(1-s)z + sr(z)$.

Chapter 24

Le théorème de Van Kampen

24.1 Motivation

Un espace topologique peut souvent être décrit comme réunion d'espaces topologiques plus "simples". Le problème que résout le théorème de van Kampen est de donner une description du groupe fondamental d'un espace en fonction des morceaux dans lequel il est découpé.

Par récurrence on est amené à comprendre ce qui se passe pour deux morceaux. Dans tout ce chapitre, nous donnerons un espace X , deux ouverts connexes X_1 et X_2 de X tels que

1. l'espace X est la réunion de X_1 et X_2 ,
2. l'intersection X_0 de X_1 et X_2 est connexe.

Nous nous proposons de décrire $\pi_1(X)$ à l'aide de $\pi_1(X_1)$, $\pi_1(X_2)$ et $\pi_1(X_0)$.

Un bon exemple à l'esprit est le cas de l'espace topologique $X = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, $X_1 = \{\Im m(z) > -1, z \neq i\}$ et $X_2 = \bar{X}_2$. Dans ce cas, nous connaissons déjà $\pi_1(X_1)$, $\pi_1(X_2)$ et $\pi_1(X_0)$.

Notations. Dans toute cette section, on suppose que X_1 et X_2 sont ouverts, et que X_0 , X_1 et X_2 sont connexes par arcs. On fixe un point base $x_0 \in X_0$. On note $G_0 = \pi_1(X_0, x_0)$, $G_1 = \pi_1(X_1, x_0)$, $G_2 = \pi_1(X_2, x_0)$ et $G = \pi_1(X, x_0)$.

24.1.1 Un résultat partiel

Lemme 24.1.1. G est engendré par les images de G_1 et de G_2 .

DÉMONSTRATION : Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un lacet basé en x_0 . On note pose

$$\begin{aligned} K_1 &= \gamma^{-1}(X \setminus X_2), \\ U_1 &= \gamma^{-1}(X_1). \end{aligned}$$

Nous remarquons que l'ouvert U_1 est formée d'une réunion dénombrable disjoints d'intervalles disjoints qui recouvre le compact K_1 . Nous en déduisons qu'il existe un nombre fini de ces intervalles disjoints $]a_i, b_i[$ qui recouvre K_1 pour i appartenant $\{1, \dots, n\}$. Par construction a_i

et b_i n'appartiennent pas à K_1 . Par compacité de K_1 , il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K_1$, et pour tout i

$$\inf\{|x - a_i|, |x - b_i|, |a_i - b_i| \mid x \in K_1, 1 \leq i \leq n\} \geq 3\epsilon$$

Soit alors $c_i = a_i + \epsilon$ et $d_i = b_i - \epsilon$. Alors par construction, on a $a_i < c_i < d_i < b_i$ et de plus

$$\begin{aligned} \gamma([c_i, d_i]) &\subset X_1, \\ \gamma([d_i, c_{i+1}]) &\subset X_2. \end{aligned}$$

Posons enfin $\gamma_i : t \rightarrow \gamma((1-t)c_i + td_i)$ et $\tilde{\gamma}_i : t \rightarrow \gamma((1-t)d_i + tc_{i+1})$ en adoptant la convention que $d_0 = 0$ et $c_{n+1} = 1$

Par construction, le lacet γ homotope au lacet $\tilde{\gamma}_0\gamma_1\tilde{\gamma}_1\ldots\gamma_n\tilde{\gamma}_n$ qui est la composition de chemins alternativement tracés dans X_1 et X_2 .

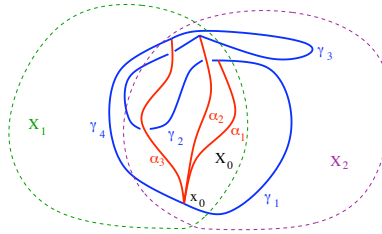
Nous choisissons maintenant pour tout i un chemin α_i de x_0 à $\gamma(c_i)$ et β_i de x_0 à $\gamma(d_i)$. Ces chemins existe bien X_0 est connexe.

On pose enfin

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_i &= \beta_i\tilde{\gamma}_i\alpha_{i+1}^{-1} \\ \xi_i &= \alpha_i\gamma_i\beta_{i+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Par construction ξ sont des lacets dans X_1 et $\tilde{\xi}$ des lacets dans X_2 basés en x_0 . Enfin le lacet ξ homotope au lacet $\tilde{\xi}_0\xi_1\tilde{\xi}_1\ldots\xi_n\tilde{\xi}_n$, c'est ce que nous voulions montrer.

□



Corollaire 24.1.2. Si X_0 est connexe et X_1, X_2 simplement connexes, X est simplement connexe.

24.2 Constructions de théorie des groupes

ON va donner denas cette section des constructions de "recolléments de groupes".

24.2.1 Produit libre de deux groupes

Théorème 51. Soit G_1 et G_2 deux groupes. Il existe un groupe G , unique à unique isomorphisme près, ayant les propriétés suivantes.

1. Il existe des homomorphismes $k_i : G_i \rightarrow G, i = 1, 2$.
2. Inversement, étant donnés un groupe H et des homomorphismes $h_i : G_i \rightarrow H, i = 1, 2$ il existe un homomorphisme unique $h : G \rightarrow H$ tel que $h_1 = h \circ k_1, h_2 = h \circ k_2$.

Définition 24.2.1. On appelle le groupe G produite par le théorème précédent produit libre des deux groupes G_1 et G_2 , noté $G_1 * G_2$.

DÉMONSTRATION : . On considère l'ensemble des suites finies $(g_1, \dots, g_k)$ d'éléments non triviaux pris alternativement dans G_1 et G_2 , sans oublier la suite vide, notée $()$. On multiplie deux suites $(g_1, \dots, g_k)$ et $(g'_1, \dots, g_\ell)$ selon la règle définie par récurrence sur la longueur comme suit : si g_k et g'_1 n'appartiennent pas au même groupe,

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (g'_1, \dots, g_\ell) = (g_1, \dots, g_k, g'_1, \dots, g_\ell).$$

Sinon, et si de plus $g_k g'_1 \neq 1$,

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (g'_1, \dots, g_\ell) = (g_1, \dots, g_k g'_1, \dots, g_\ell).$$

Enfin, si $g_k g'_1 = 1$,

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (g'_1, \dots, g_\ell) = (g_1, \dots, g_{k-1}) \cdot (g'_2, \dots, g_\ell),$$

qui est déjà défini, car de longueur inférieure. On vérifie (laborieux) que cette multiplication est associative. Cela donne un groupe G , avec élément neutre $()$, l'inverse de $(g_1, \dots, g_k)$ étant $(g_k^{-1}, \dots, g_1^{-1})$.

Clairement, l'application $k_1 : G_1 \rightarrow G, e \mapsto (), g \mapsto (g)$ est un homomorphisme injectif. De même pour G_2 . Remarquer que $k_1(G_1)$ et $k_2(G_2)$ engendrent G . Si H est un groupe, et si $h_i : G_i \rightarrow H, i = 1, 2$, sont des homomorphismes, l'application $h : G \rightarrow H$, définie par $h(g_1, \dots, g_k) = \Pi_j h_{\sigma(j)}(g_j)$, où $\sigma(j)$ est le numéro du groupe auquel g_j appartient, est un homomorphisme, et c'est le seul possible, qui satisfait $h_1 = h \circ k_1, h_2 = h \circ k_2$. On conclut que G est le produit libre de G_1 et de G_2 . $\square$

EXEMPLE : $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ s'appelle le groupe libre à deux générateurs.

EXEMPLE : En général, $G_1 * (G_2 * G_3) = (G_1 * G_2) * G_3$, qu'on note $G_1 * G_2 * G_3$. On peut donc noter $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ le groupe libre à n générateurs.

24.2.2 Groupes définis par générateurs et relation

Nous nous intéressons au groupe libre à n générateurs $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$.

Mots et alphabets

Donnons quelques définitions.

Définition 24.2.2. [MOTS ET MOTS RÉDUITS] *Un mot sur un alphabet à n lettres est une paire de k -uplets $(i_1, \dots, i_k)$ et $(n_1, \dots, n_k)$ – éventuellement vide – telle que $i_j \in \{1, \dots, n\}$ et $n_j \in \mathbb{Z}$. Un mot est réduit si de plus*

1. on a $i_j \neq i_{j+1}$,
2. on a $n_i \neq 0$.

Pour représenter de manière pratique les mot sur un alphabet à n lettres, on choisit n symboles ou *lettres* $\{a_1, \dots, a_n\}$ et on représente le mot $w = ((i_1, \dots, i_k), (n_1, \dots, n_k))$ sous la forme $w = a_{i_1}^{n_1} \dots a_{i_k}^{n_k}$. Par convention, on note la suite vide e .

Définition 24.2.3. [CONCATÉNATION] On définit ensuite le produit de concaténation des mots $w_1 = a_{i_1}^{n_1} \dots a_{i_k}^{n_k}$ et $w_2 = a_{j_1}^{m_1} \dots a_{j_k}^{m_k}$ sous la forme

$$w_1.w_2 = a_{i_1}^{n_1} \dots a_{i_k}^{n_k} a_{j_1}^{m_1} \dots a_{j_k}^{m_k}.$$

L'inverse du mot $w = a_{i_1}^{n_1} \dots a_{i_k}^{n_k}$ est le mot $w^{-1} = a_{i_k}^{-n_k} \dots a_{i_1}^{-n_1}$

On remarque que le produit de concaténation est compatible avec l'écriture d'un mot en lettres.

On remarque que le produit de concaténation est associatif. On a alors une projection naturelle π des mots vers les mots réduits caractérisée par les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} \pi(aw^n w^p b) &= \pi(aw^{n+p} b) \\ \pi(aw^0 b) &= \pi(ab) \end{aligned}$$

Définition 24.2.4. [GROUPE LIBRE] Le groupe libre à n générateurs sur les lettres $a_1, \dots, a_n$ est alors le groupe dont les éléments sont les mots réduits et le produit est donné par $a * b = \pi(a.b)$. Par convention, on note le groupe libre sur les n lettres $a_1, \dots, a_n$ sous la forme $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Groupes définis par générateurs et relations

On se donne un ensemble fini de relations $R_1, \dots, R_p$, c'est à dire de mots sur l'alphabet $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Définition 24.2.5. [GROUPE DÉFINI PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS] Le groupe engendré par $a_1, \dots, a_n$ vérifiant les relations $R_1, \dots, R_p$ est le groupe

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = \dots R_p = e \rangle := \langle a_1, \dots, a_n \rangle / N(R_1, \dots, R_p),$$

où $N(R_1, \dots, R_p)$ est le groupe normalement engendré par $R_1, \dots, R_p$, c'est-à-dire l'intersection de tous les sous groupes distingués contenant les mots $R_1, \dots, R_p$.

On a les deux propositions suivantes.

Proposition 24.2.6. Si $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = \dots R_p = e \rangle$ et $H = \langle b_1, \dots, b_m \mid S_1 = \dots S_k = e \rangle$ alors le produit libre $G * H$ est isomorphe à

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid R_1 = \dots R_p = S_1 = \dots S_k = e \rangle.$$

Si $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = \dots R_p = e \rangle$ et si N est un sous groupe normalement engendré par les mots $S_1 \dots S_k$ alors G/N est isomorphe à

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = \dots R_p = S_1 = \dots S_k = e \rangle.$$

24.2.3 Somme amalgamée de groupes

Nous allons maintenant recoller deux groupes G_1 et G_2 en utilisant un troisième groupe.

Théorème 52. Soit G_1 et G_2 deux groupes. Soit G_0 un troisième groupe, soit $f_1 : G_0 \rightarrow G_1$ et $f_2 : G_0 \rightarrow G_2$ deux homomorphismes. Il existe un groupe G , unique à unique isomorphisme près, ayant les propriétés suivantes.

1. Il existe des homomorphismes $k_i : G_i \rightarrow G$, $i = 1, 2$ tels que $k_1 \circ f_1 = k_2 \circ f_2$.
2. Inversement, étant donné un groupe H et des homomorphismes $h_i : G_i \rightarrow H$, $i = 1, 2$ tels que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, il existe un homomorphisme unique $h : G \rightarrow H$ tel que $h_1 = h \circ k_1$, $h_2 = h \circ k_2$.
- 3.

Définition 24.2.7. On appelle le groupe G produit par le théorème précédent la somme amalgamée de G_1 et G_2 au-dessus de G_0 , et on le note $G_1 *_{G_0} G_2$.

DÉMONSTRATION :

Unicité. Soit G, G' deux solutions du problème. On applique la propriété universelle à chacun d'entre eux, cela donne deux homomorphismes $h : G \rightarrow G'$ et $h' : G' \rightarrow G$, puis on constate que $h' \circ h : G \rightarrow G$ est solution du problème universel pour $H = G$, d'où $h' \circ h = id_G$.

DÉMONSTRATION :

Soit $N \subset G_1 * G_2$ le plus petit sous-groupe distingué de $G_1 * G_2$ qui contient $f_1(\ker(f_2))$, $f_2(\ker(f_1))$ ainsi que tous les éléments de la forme $(f_1(g_0), f_2(g_0)^{-1})$ pour $g_0 \in G_0 \div (\ker(f_1) \cup \ker(f_2))$. Soit G le groupe quotient $G_1 * G_2 / N$, avec les homomorphismes $k_1 : G_1 \rightarrow G_1 * G_2 \rightarrow G$ et $k_2 : G_2 \rightarrow G_1 * G_2 \rightarrow G$. Par construction, pour tout $g_0 \in G_0$, $k_1 \circ f_1(g_0)(k_2 \circ f_2(g_0))^{-1} = f_1(g_0)f_2(g_0)^{-1} = e \text{ mod } N$, donc $k_1 \circ f_1 = k_2 \circ f_2$.

Si H est un groupe, $h_1 : G_1 \rightarrow H$ et $h_2 : G_2 \rightarrow H$ des homomorphismes tels que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, alors l'homomorphisme induit $\bar{h} : G_1 * G_2 \rightarrow H$ est trivial sur N , donc passe au quotient en $h : G \rightarrow H$ qui satisfait $h_1 = h \circ k_1$, $h_2 = h \circ k_2$. Inversement, tout homomorphisme $h : G \rightarrow H$ tel que $h_1 = h \circ k_1$, $h_2 = h \circ k_2$ se relève en un homomorphisme $G_1 * G_2 \rightarrow H$ trivial sur N , donc il n'y a aucun choix pour h . On conclut que $G = G_1 *_{G_0} G_2$. $\square$

REMARQUES : Lorsque $f_1 : G_0 \rightarrow G_1$ et $f_2 : G_0 \rightarrow G_2$ sont injectives, les homomorphismes naturels $k_1 : G_1 \rightarrow G_1 *_{G_0} G_2$ et $k_2 : G_2 \rightarrow G_1 *_{G_0} G_2$ sont injectifs.

Dans ce cas, on peut penser à G_0 comme à un sous-groupe commun à G_1 et G_2 , et à $G_1 *_{G_0} G_2$ comme le produit libre dans lequel on s'est arrangé pour que chaque élément de G_0 n'apparaisse qu'une seule fois. En terme de générateurs et relations, on a la proposition suivantes

Proposition 24.2.8. Si $G_1 = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = \dots R_p = e \rangle$ et $G_2 = \langle b_1, \dots, b_m \mid S_1 = \dots S_k = e \rangle$. Si G_0 est engendré par les éléments $w_1, \dots, w_q$ alors $G_1 *_{G_0} G_2$ est isomorphe au groupe

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid R_1 = \dots R_p = S_1 = \dots S_k = i_1(w_1)i_2^{-1}(w_1) = \dots = i_1(w_q)i_2^{-1}(w_q)e \rangle.$$

24.3 Théorème de Van Kampen

Théorème 53. Soit X un espace topologique, soit X_1, X_2 des ouverts connexes par arcs de X tels que $X = X_1 \cup X_2$ et tels que $X_0 = X_1 \cap X_2$ soit connexe par arcs. Notons $G_i = \pi_1(G_i)$, $i = 0, 1, 2$, avec les homomorphismes $f_1 : G_0 \rightarrow G_1$ et $f_2 : G_0 \rightarrow G_2$ induits par les injections $X_0 \rightarrow X_1$ et $X_0 \rightarrow X_2$. Alors l'homomorphisme naturel $G_1 *_{G_0} G_2 \rightarrow \pi_1(X)$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION : Nous donnons tout d'abord l'idée de la démonstration lorsque X_0 est simplement connexe. Nous voulons donc montrer que si une composition d'arc $g = g_1 \cdot h_1 \cdot g_2 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot g_n$ avec les g_i tracées alternativement dans X_1 et les h_i dans X_2 , est homotope à zéro alors chacun des g_i – respectivement h_i – est homotope à zéro dans X_1 – respectivement dans X_2 .

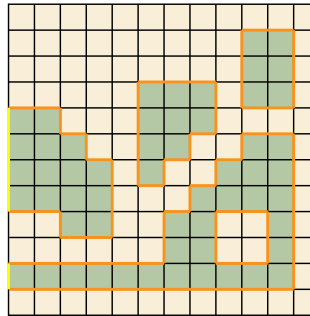
Nous commençons comme dans la preuve de la surjectivité. Nous avons par hypothèse une application C du carré $[0, 1]^2$ à valeurs dans X et réalisant une homotopie de g vers le lacet constant.

Nous nous représentons ce carré de façon à ce que l'image des côté haut, bas et droit soit l'origine x_0 de nos lacets x_1 .

Nous découpons le carré $[0, 1]^2$ en N^2 carrés dont les longueurs ont $1/N$, avec suffisamment grand de telle sorte que d'après notre lemme topologique 7.5.2, chaque carré soit envoyé soit dans X_1 soit dans X_2 . Notons C l'ensemble de ces carrés.

Choisissons une bonne fois pour tout un *coloriage*, c'est-à-dire une fonction ϵ de C à valeurs dans $\{1, 2\}$ de telle sorte que le carré c soit incl. dans $\epsilon(c)$. Nous avons représenté sur le dessin par les carrés verts ceux qui sont inclus dans X_1 et les carrés roses ceux qui sont inclus dans X_2 .

Nous pouvons toujours choisir le découpage et le coloriage de façon à ce que tous les carrés qui touchent les lacets g_i et h_i soient respectivement verts et roses.



La réunion des carrés verts peut alors être décomposée en une réunion finie de régions "connexes" disjointes. Chacune de ces régions est composée des carrés qui peuvent être joints l'un à l'autre par une succession de carrés verts se touchant en un côté. On procède de la même manière pour les carrés roses.

Nous allons maintenant utiliser la simple connexité de X_0 pour éliminer toutes les régions intérieures, c'est-à-dire celle qui ne touchent pas les côtés du grand carré. Par éliminer, nous voulons dire remplacer l'homotopie par une autre.

Chacune de ces régions est bordée par un nombre finis de lacets pas nécessairement basés en x_0 et qui dans le dessin sont représentés en orange. Par construction, l'image de ces lacets est tracée dans X_0 . Soit γ l'un de ces lacets, ce lacet borde une région D_γ homéomorphe à un disque. Nous supposons que les carrés intérieurs le long de γ sont verts.

Comme X_0 est simplement connexe, nous pouvons trouver une application du disque à valeurs dans X_0 qui prolonge γ . Comme le disque est homéomorphe à D_γ , ceci

signifie que nous pouvons trouver une application F de D_γ à valeurs dans X_0 qui prolonge γ . Nous remplaçons $C|_{D_\gamma}$ par cette application F pour obtenir une nouvelle homotopie $\tilde{C}$. Nous ne changeons par le coloriage à l'extérieur de γ , mais nous avons toute liberté de choisir la couleur à l'intérieur de D_γ , puisque l'image de D_γ est maintenant à la fois dans X_1 et X_2 . Nous choisissons donc la couleur rose. Nous avons ainsi un nouveau coloriage avec une courbe de moins.

En répétant cette procédure nous arrivons à la situation suivante : la région attenante à un arc g_i est homéomorphe au disque, et son bord est composé de la réunion de g_i et d'un arc "orange" c'est-à-dire dont l'image est tracée dans X_0 . Ainsi g_i est homotope dans X_1 à un arc tracé dans X_0 , qui lui-même est homotope à zéro – par hypothèse dans X_0 et donc en particulier dans X_1 . Nous venons de démontrer que g_i est homotope à zéro dans X_1 . Le même raisonnement montre que h_i est homotope à zéro dans X_2 . $\square$

Voici une démonstration plus formelle dans le cas général.

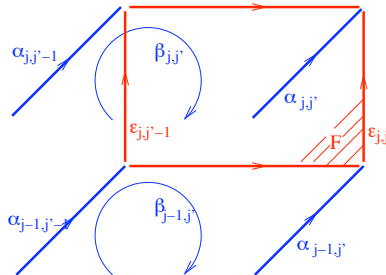
DÉMONSTRATION : Notons $G = \pi_1(X)$. Notons $\bar{h} : G_1 * G_2 \rightarrow G$ l'homomorphisme naturel. Comme les injections $X_0 \subset X_1 \subset X$ et $X_0 \subset X_2 \subset X$ forment un diagramme commutatif, il en est de même au niveau des groupes fondamentaux, donc il y a un homomorphisme naturel $h : G_1 *_{G_0} G_2 \rightarrow G$. Comme les images de G_1 et G_2 dans G engendrent G , h est surjectif. Comme $\bar{h}$ relève h , il est trivial sur le sous-groupe distingué D engendré par les $f_1(g_0)f_2(g_0)^{-1}$, $g_0 \in G_0$. Reste à voir que $\ker(\bar{h}) \subset D$.

Soit $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ un lacet dans X , basé en x_0 , obtenu par composition de lacets $\gamma_j \subset G_{\sigma(j)}$. Supposons γ homotope à une constante (i.e. $[\gamma] \in \ker(\bar{h})$). Soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une telle homotopie, dans laquelle $F(0, t)$, $t \in [\frac{j'-1}{k}, \frac{j'}{k}]$ est une paramétrisation de $\gamma_{j'}$. On applique le lemme 7.5.2 au recouvrement du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par les deux ouverts $F^{-1}(X_1)$ et $F^{-1}(X_2)$. On obtient un entier N tel que tout sous-carré de côté $1/N$ soit envoyé entièrement dans X_1 ou dans X_2 . On peut supposer que N est un multiple de k . Pour tout $(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on pose $\sigma(j, j') = 0$ si $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) \in X_0$, $\sigma(j, j') = 1$ ou 2 sinon, et on relie x_0 à $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N})$ par un chemin $\alpha_{j,j'}$ entièrement contenu dans $X_{\sigma(j,j')}$. Si $j = 1$, $j' = 0$ ou $j' = 1$, $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) = x_0$ et on choisit le chemin constant.

Pour chaque j , $t \mapsto F(\frac{j}{N}, t)$ est un lacet basé en x_0 , noté β_j . On écrit $\beta_j = \beta_{j,1} \cdots \beta_{j,N}$, où

$$\beta_{j,j'} = \alpha_{j,j'-1} \cdot F|_{[\frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}]} \cdot \alpha_{j,j'}^{-1} \subset X_{\max\{\sigma(j,j'-1), \sigma(j,j')\}}.$$

Lorsque $\max\{\sigma(j, j'-1), \sigma(j, j')\} = 0$, on décide de voir $\beta_{j,j'}$ comme un lacet de X_1 . Autrement dit, on peut voir β_j comme l'élément $m_j = [\beta_{j,1}] \cdots [\beta_{j,N}]$ du produit libre $G_1 * G_2$.



Montrons que modulo le sous-groupe distingué D , m_j est indépendant de j . Notons

$\epsilon_{j,j'} = F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times \{\frac{j'}{N}\})$. Si $F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}]) \subset X_1$, alors $\beta_{j,j'}$ est homotope dans X_1 à

$$\beta'_{j,j'} = \alpha_{j,j'-1} \cdot \epsilon_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \beta_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1}.$$

Si $F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}])$ n'est pas entièrement contenu dans X_1 , alors il est contenu dans X_2 . Décider de changer le statut de $\beta_{j,j'}$ de celui de lacet de X_1 à celui de lacet de X_2 n'est nécessaire que si $\beta_{j,j'} \subset X_0$ et revient à multiplier $[\beta_{j,j'}]$ par un élément de D . Donc quitte à multiplier m_j et m_{j-1} par des éléments de D , on peut décider que tout se passe dans X_2 et dans ce cas l'homotopie de $\beta_{j,j'}$ à $\beta'_{j,j'}$ a lieu à nouveau. Dans l'élément m_j , on trouve, modulo D , le produit

$$\begin{aligned} \beta'_{j,j'} \beta'_{j,j'+1} &= \alpha_{j,j'-1} \cdot \epsilon_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \beta_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \\ &\quad \cdot \beta_{j-1,j'+1} \cdot \alpha_{j,j'+1} \cdot \epsilon_{j-1,j'+1} \cdot \alpha_{j-1,j'+1}^{-1}, \end{aligned}$$

au coeur duquel figure

$$\alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1},$$

qui est trivial si les 6 chemins sont contenus dans le même X_1 ou X_2 . Sinon, c'est qu'ils sont tous contenus dans X_0 . On a donc affaire au produit de deux lacets de X_0 inverses l'un de l'autre, leur produit appartient à D . Modulo D , le facteur qui s'intercale entre $\beta_{j-1,j'}$ et $\beta_{j-1,j'+1}$ dans le produit est trivial. Les termes de bords $\alpha_{j,0} \cdot \epsilon_{j-1,0}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,0}^{-1}$ et $\alpha_{j,N} \cdot \epsilon_{j-1,N} \cdot \alpha_{j-1,N}^{-1}$ sont des lacets constants. On conclut que $m_j = m_{j-1} \bmod D$ dans $G_1 * G_2$. Comme le dernier mot m_N est trivial et le premier égal à γ , on conclut que $\gamma \subset D$, i.e. que $\ker(\bar{h}) \subset D$. $\square$

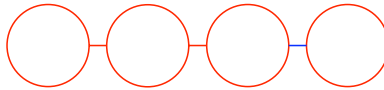
24.3.1 Exemples

Proposition 24.3.1. *Soit G un graphe fini connexe. Alors $\pi_1(G)$ est un groupe libre à κ générateurs, où κ , la connectivité de G , vaut*

$$\kappa = 1 - S + A,$$

où S est le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes de G .

DÉMONSTRATION : Lorsqu'on écrase une arête dont les sommets sont distincts, S et A diminuent d'une unité, donc la connectivité ne change pas. Lorsque toutes les arêtes sont écrasées, sauf les boucles, on se retrouve avec κ boucles attachées à l'unique sommet. On introduit une arête entre deux boucles, pour obtenir la figure suivante, notée L_κ . A nouveau, cela ne change ni la connectivité, ni le groupe fondamental.



On lui applique le théorème de Van Kampen, avec X_1 homéomorphe à un cercle avec une arête qui dépasse, X_2 à un $L_{\kappa-1}$ avec une arête qui dépasse, X_0 une arête sans ses extrémités. Comme $\pi_1(X_0)$ est trivial, $\pi_1(X)$ est un produit libre. Clairement, le cercle avec arête ouverte qui dépasse se rétracte par déformation sur le cercle. De même pour $L_{\kappa-1}$. On trouve que $\pi_1(G)$ est un produit libre de κ copies de $\mathbb{Z}$. $\square$

Corollaire 24.3.2. 1. *La connectivité est un invariant d'homotopie des graphes.*

2. *Le groupe fondamental de $\mathbb{C}$ privé de 2 points est un groupe libre à 2 générateurs. Il n'est donc pas commutatif.*

Chapter 25

Revêtements

25.1 Introduction

Il s'agit d'étendre à d'autres situations la propriété de relèvement mise en évidence pour l'application exponentielle $\mathbb{R} \rightarrow U$.

25.1.1 Définition

Définition 25.1.1. Une application continue $p : E \rightarrow X$ est un revêtement si tout point $x \in X$ a un voisinage U tel que

1. $p^{-1}(U) = \sqcup_{i \in I} V_i$, $V_i \subset E$, $I \neq \emptyset$, réunion disjointe d'ouverts,
2. pour chaque $i \in I$, $p|_{V_i} = V_i \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

On appelle X la base et E l'espace total du revêtement. J'appelle U un voisinage trivialisant.

Démontrons les propriétés suivantes

Proposition 25.1.2. 1. si U est un ouvert trivialisant, si V est un ouvert contenu dans U , alors V est également trivialisant.

2. Si U est un ouvert trivialisant connexe, alors p est un homéomorphisme de chaque composante connexe de $p^{-1}(U)$ sur U .
3. p est un homéomorphisme local, donc les fibres $p^{-1}(y)$ sont discrètes.
4. On peut faire des produits de revêtements $(p, p') : E \times E' \rightarrow X \times X'$.
5. Si X est connexe, les fibres $p^{-1}(x)$, $x \in X$, ont toutes le même cardinal (éventuellement infini).
6. Si $p : E \rightarrow X$ est un revêtement et $Y \subset X$, alors $p|_{p^{-1}(Y)} : p^{-1}(Y) \rightarrow Y$ est un revêtement.

DÉMONSTRATION :

1. Ce premier point est trivial.

2. Pour le deuxième point, on voit que si $p^{-1}(V) = \sqcup_{i \in I} V_i$ où les V_i sont ouverts, alors chaque V_i est à la fois ouvert et fermé dans $p^{-1}(V)$.
3. Les derniers points sont évidents.

25.1.2 Exemples

1. Soit S un espace topologique discret. Alors la projection sur le premier facteur $p : X \times S \rightarrow X$ est un revêtement appelé *revêtement trivial* de fibre S .
2. $t \mapsto e^{it}, \mathbb{R} \rightarrow U$ est un revêtement.
3. $z \mapsto e^z, \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un revêtement.
4. Si $n \neq 0, z \mapsto z^n, U \rightarrow U$, est un revêtement.
5. La restriction de $t \mapsto e^{it}$ à $]0, 3\pi[$ n'est pas un revêtement de $]0, 3\pi[$ sur U .

En effet, soit U le voisinage de -1 dans U formé des $z \in U$ dont l'argument diffère de π (modulo 2π) d'au plus ϵ . Alors $p^{-1}(U)$ est la réunion disjointe de deux intervalles, $V_1 =]\pi - \epsilon, \pi + \epsilon[$ et $V_2 =]3\pi - \epsilon, 3\pi[$. V_1 est l'image d'une section de p au-dessus de U , mais V_2 ne l'est pas. D'ailleurs, le cardinal des fibres n'est pas constant.

Proposition 25.1.3. Soit $p : E \rightarrow X$ un homéomorphisme local, avec E compact. Alors p est un revêtement.

DÉMONSTRATION : Soit $x \in X$. Alors $p^{-1}(x) = \{e_1, \dots, e_n\}$ est fini car discret et compact. Soit W_i un voisinage ouvert de e_i tel que $p|_{W_i}$ soit un homéomorphisme de W_i sur un ouvert U_i contenant x . Quitte à rétrécir, on peut supposer les W_i deux à deux disjoints. Quitte à rétrécir encore, on peut supposer qu'il existe un voisinage U de x , tel que pour tout i , p est un homéomorphisme de W_i sur U .

Il reste à montrer, au besoin en rétrécissant U , que $p^{-1}(U) \subset \bigcup_i W_i$. Considérons $K = Y \setminus \bigcup_i W_i$, K est un compact, donc $p(K)$ est un compact qui ne contient pas x . Par construction $O = X \setminus p(K)$ est un voisinage ouvert de x . Considérons enfin, $O_i = p^{-1} \cap W_i$. A nouveau, p est un homéomorphisme local de O_i sur O , et les O_i sont tous disjoints.

Par construction $p^{-1}(O) \cap K = \emptyset$. Nous en déduisons que $p^{-1}(O) \subset \bigcup_i W_i$ et ainsi $p^{-1}(O) = \bigcup_i W_i$. L'ouvert O est donc trivialisant. $\square$

EXEMPLE : L'application $f : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ qui à un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^{n+1}$ associe la droite vectorielle qu'il engendre est un revêtement.

En effet, soit $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Choisissons des coordonnées homogènes de sorte que $p = [0 : \dots : 1]$. Si $q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est proche de p , il admet des coordonnées homogènes de la forme $q = [x_0 : \dots : x_n]$ avec $x_n > 0$. Alors $(x_0^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2}(x_0, \dots, x_n)$ est l'unique vecteur unitaire sur la droite q dont la dernière composante est > 0 . Il dépend continûment de q . Il y a deux telles applications réciproques locales de f , donc f est un revêtement. $\square$

Proposition 25.1.4. Soit E un espace topologique localement compact (i.e. tout point admet une base de voisinages compacts). Soit G un groupe qui agit sur E

1. librement, i.e. si $x \in E$ et $g \neq 1$, alors $gx \neq x$;
2. proprement, i.e. si $K \subset E$ est compact, l'ensemble des $g \in G$ tels que $gK \cap K \neq \emptyset$ est fini.

Alors $X = G \div E$ est séparé, et la projection $p : E \rightarrow G \div E$ est un revêtement.

DÉMONSTRATION : Séparation : voir TD. Soit $e \in E$. Soit V un voisinage compact de e . Comme E est séparé, et comme l'intersection de V et de l'orbite de e est un ensemble fini, les points de $Ge \cap V = \{e = g_0e, g_1e, \dots, g_ne\}$ admettent des voisinages U_i deux à deux disjoints dans V . Soit $U = \bigcap_i g_i^{-1}(U_i)$. C'est un voisinage de e dont les translatés par des éléments de G sont deux à deux disjoints. La restriction de p à chaque gU est un homéomorphisme sur le voisinage $[U]$ de la classe $[p] \in G \div E$. $\square$

EXEMPLE : L'application $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est le revêtement associé à l'action du groupe à 2 éléments sur la sphère par $x \mapsto -x$.

EXEMPLE : Soit $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ le groupe cyclique à n éléments, agissant par multiplication sur U . Alors le revêtement associé n'est autre que $z \mapsto z^n$, $U \rightarrow U$.

EXEMPLE : Soit $G \subset \mathbb{R}$ le groupe engendré par la translation de 2π . Alors G agit librement et proprement sur $\mathbb{R}$. Le revêtement associé coïncide avec le revêtement exponentiel $\mathbb{R} \rightarrow U$.

25.1.3 Sections

Définition 25.1.5. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Une section de p est une application continue $s : X \rightarrow E$ telle que $p \circ s = \text{id}_X$. Une section au-dessus de $Y \subset X$, c'est une section de $p|_{p^{-1}(Y)}$, i.e. définie seulement au-dessus de Y . Une section locale en x est une section définie sur un voisinage de x .

Proposition 25.1.6. Nous avons

1. Une section s au-dessus de Y est automatiquement un homéomorphisme de Y sur $s(Y)$.
2. Par définition même, un revêtement possède des sections locales en tout point x , exactement autant que d'images réciproques de x
3. Si Y est connexe, deux sections au dessus de Y qui coïncident en un point sont égales
4. une section locale est une application ouverte.
5. si σ est une section au-dessus d'un ouvert U connexe alors $\sigma(U)$ est une composante connexe de $p^{-1}(U)$.

25.1.4 Morphismes

On précise le sens de "coïncide".

Définition 25.1.7. Soit $p : E \rightarrow X$ et $p' : E' \rightarrow X$ deux revêtements. On appelle morphisme de E vers E' une application continue $m : E \rightarrow E'$ telle que $p' \circ m = p$. Si f est une bijection, on parle d'isomorphisme.

Remarquer que si E' est connexe, un morphisme injectif est automatiquement un isomorphisme, lequel est automatiquement un homéomorphisme.

EXEMPLE : Dans la situation de la proposition 59, le groupe G agit sur E par automorphismes du revêtement $E \rightarrow G \div E$.

Définition 25.1.8. On dit qu'un revêtement est trivial s'il est isomorphe à un revêtement trivial $X \times S$.

Noter que si S a plus d'un élément, $X \times S$ n'est jamais connexe. Par conséquent, un revêtement $p : E \rightarrow X$ avec E connexe n'est trivial que si c'est un homéomorphisme.

EXEMPLE : Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ le groupe engendré par n translations linéairement indépendantes. Le revêtement associé est isomorphe au produit de n copies du revêtement exponentiel $\mathbb{R} \rightarrow U$.

En effet, à changement linéaire de coordonnées près, on peut supposer que $G = \mathbb{Z}^n$ est l'ensemble des translations par les vecteurs à coordonnées entières.

Voici une manière de comprendre les morphismes de revêtements.

Proposition 25.1.9. Soit $p : E \rightarrow X$ et $p' : E' \rightarrow X$ deux revêtements et m un morphisme de E vers E' . Alors

1. Soit U un ouvert de X à la fois trivialisant pour p et p' . Soit σ une section locale de p définie de U dans U_i , alors $m \circ \sigma$ est une section locale de p' .
2. Un morphisme de revêtement est un homéomorphisme local dont l'image est fermée.
3. Si E' est connexe alors, un morphisme de revêtements est un morphisme.

DÉMONSTRATION : Le premier point suit de la définition.

Montrons un résultat intermédiaire : soit U un ouvert connexe trivialisant à la fois pour p et p' , soit V une composante connexe de $p^{-1}(U)$ alors m est un homéomorphisme de V sur une composante connexe de $p'^{-1}(U)$. Il est clair que $m(V)$ est connexe et donc inclus dans une composante connexe V' de $p'^{-1}(U)$. Soit σ' la section de p' définie de U dans V' . Alors $m = \sigma' \circ p$. Ainsi m est un homéomorphisme de V sur V' .

Nous en déduisons immédiatement que m est un homéomorphisme local. Montrons que l'image est fermée : soit y un point qui n'appartient pas à l'image, soit U un voisinage connexe trivialisant à la fois pour p et p' de $p(y)$ et V un voisinage de y telle que p' est un homéomorphisme de V sur U . Montrons que V n'intersecte pas $m(E)$, ceci montrera que $m(E)$ est fermé. Soit z tel que $m(z)$ appartienne à V . Soit O la composante connexe de $p^{-1}(U)$ contenant z . Comme $m(O)$ est la composante connexe de $p'^{-1}(U)$ contenant $m(z)$, c'est donc V . En particulier V est inclus tout entier dans $m(E)$ et la contradiction.

Un homéomorphisme local étant une application ouverte, l'image $m(E)$ est un ouvert. Son image est fermée par ce qui précède. Si E' est connexe nous en déduisons que m est surjective. Le résultat intermédiaire montre que m est un revêtement dont les ouverts trivialisant sont les composantes connexes des préimages par p' des ouverts trivialisant à la fois pour p et p' .

25.2 Relèvement des homotopies

25.2.1 Relèvements

Définition 25.2.1. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue. Un relèvement de f à E , c'est une application $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$. Si on se donne en plus des points bases $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$, et un relèvement $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ dans E , on parle de relèvement d'origine $\tilde{x}_0$.

Lemme 25.2.2. Lorsque Y est connexe, quand f admet un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$, il est unique.

DÉMONSTRATION : Soit $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ deux relèvements d'origine $\tilde{x}_0$. Alors $\{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}$ est ouvert. En effet, au voisinage de $\tilde{f}(y)$, p est un homéomorphisme, donc pour z proche de y , l'équation $p(\tilde{x}) = f(z)$ admet une unique solution voisine de $\tilde{f}(y)$, c'est $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(y)$. Comme cet ensemble est non vide et fermé, c'est Y , donc $\tilde{f} = \tilde{f}'$. $\square$

25.2.2 Relèvement des chemins

La proposition suivante généralise le théorème de relèvement du revêtement exponentiel. On organise la preuve différemment.

Proposition 25.2.3. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ admet des relèvements. Si on fixe $x_0 \in X$ et un relèvement $\tilde{x}_0 \in E$ de x_0 , il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma}$ d'origine $\tilde{x}_0$.

DÉMONSTRATION : On se donne une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, tel que pour tout i , $c[t_j, t_{j+1}]$ soit inclus dans un ouvert trivialisant O^j . On pose ensuite $p^{-1}(O^j) = \sqcup_{i \in I} O_i^j$ et on note σ_i^j la section locale de p définie de O^j dans O_i^j .

Ensuite on construit par récurrence une suite $i_1, \dots, i_n$ telle que

$$\sigma_{i_j}^j(c(t_{j+1})) = \sigma_{i_{j+1}}^{j+1}(c(t_{j+1})).$$

Enfin, on définit $\tilde{c} = \sigma_{i_j}^j(c)$ sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ $\square$

25.2.3 Relèvement des homotopies

La proposition suivante généralise l'invariance du degré par homotopie.

Proposition 25.2.4. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Soit Y un espace topologique. Fixons des points bases $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ et un relèvement $\tilde{x}_0 \in E$ de x_0 . Soit $F : [0, 1] \times Y \rightarrow X$ une homotopie entre deux applications f_0 et $f_1 : Y \rightarrow X$ envoyant y_0 sur x_0 . Si f_0 possède un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$, il en est de même de F , et par conséquent de f_1 .

DÉMONSTRATION : D'après la proposition précédente, pour chaque $y \in Y$, le chemin $\gamma_y : s \mapsto F(s, y)$ possède un unique relèvement $\tilde{\gamma}_y$ d'origine $\tilde{f}_0(y)$. On pose $\tilde{F}(s, y) = \tilde{\gamma}_y(s)$. Pour

montrer que $\tilde{F}$ est continue, il suffit de vérifier que le procédé de relèvement est continu, i.e. que deux chemins voisins se relèvent en deux chemins voisins. Or relever un chemin γ_y , c'est faire appel à un nombre fini de sections locales s_j (définies sur les ouverts trivialisants recouvrant le compact $\gamma([0, 1])$). Les mêmes sections locales permettent de relever γ_z pour z proche de y .

Donnons une preuve plus précise, en utilisant la démonstration du relèvements des chemins. Nous nous donnons un point y de Y et le chemin $c = \gamma_y$ défini plus haut. D'après la preuve du relèvement des chemins, nous avons une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, tel que pour tout i , $c[t_j, t_{j+1}]$ soit inclus dans un ouvert trivialisant O^j . On pose ensuite $p^{-1}(O^j) = \sqcup_{i \in I} O_i^j$ et on note σ_i^j la section locale de p définie de O^j dans O_i^j .

Nous avons ensuite par récurrence une suite $i_1, \dots, i_n$ définie de manière unique par la propriétés suivantes

$$\sigma_{i_j}^j(c(t_{j+1})) = \sigma_{i_{j+1}}^{j+1}(c(t_{j+1})).$$

Enfin, on définit $\tilde{c} = \sigma_{i_j}^j(c)$ sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$.

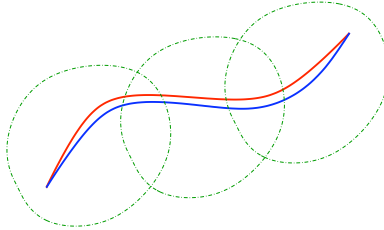
Nous nous proposons de montrer que pour t appartenant à $[t_j, t_{j+1}]$, pour (z, s) au voisinage de (y, t) on a $\tilde{F}(z, s) = \sigma_{i_j}^j F(z, s)$. Ceci montrera que $\tilde{F}$ est continue. Or pour z suffisamment proche de y on a par continuité de F

$$\begin{aligned} \gamma_z[t_j, t_{j+1}] &\subset O^j, \\ \sigma_{i_j}^j(\gamma_z(t_{j+1})) &\in O_{i_{j+1}}^{j+1}, \end{aligned}$$

car ce sont deux propriétés ouvertes. En particulier, comme les σ sont des sections locales on a

$$\sigma_{i_j}^j(\gamma_z(t_{j+1})) = \sigma_{i_{j+1}}^{j+1}(\gamma_z(t_{j+1})).$$

D'après la construction du relèvement des chemins, cela donne bien $\tilde{F}(z, s) = \sigma_{i_j}^j F(z, s)$. □



Corollaire 25.2.5. Soit α, β deux chemins dans X de mêmes extrémités x_0 et x_1 . Soit $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0 . Soit $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ les relèvements de α et β d'origine $\tilde{x}_0$. Si α et β sont homotopes à extrémités fixées, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. En particulier, si α est un lacet homotope à une constante, $\tilde{\alpha}$ est un lacet.

DÉMONSTRATION : Par l'hypothèse, l'homotopie F de α à β satisfait $F(s, 1) = x_1$ pour tout s . Son relèvement $\tilde{F}$ satisfait $\tilde{F}(s, 1) \in p^{-1}(x_1)$ pour tout s . Comme $p^{-1}(x_1)$ est discret, $\tilde{F}(s, 1)$ ne dépend pas de s , donc $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(0, 1) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{\beta}(1)$. □

25.3 Critère de relevabilité

Théorème 54. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe, $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0 . Soit Y un espace connexe et localement connexe par arcs, soit $y_0 \in Y$ un point base. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue qui envoie y_0 en x_0 . Alors f possède un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$ si et seulement si

$$f_{\#}(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)).$$

Le relèvement est alors unique.

DÉMONSTRATION : Supposons que f possède un relèvement $\tilde{f} : Y \rightarrow E$. Alors $f_{\#} = p_{\#} \circ \tilde{f}_{\#}$ donc son image est contenue dans celle de $p_{\#}$.

Réciproquement, supposons que l'image de $f_{\#}$ est contenue dans celle de $p_{\#}$. Soit $y \in Y$ et γ un chemin de y_0 à y . Le chemin $\alpha = f \circ \gamma$ de x_0 à $f(y)$ possède un relèvement $\tilde{\alpha}$ d'origine $\tilde{x}_0$. Posons $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$. Si γ' est un autre lacet de y_0 à y , alors le lacet $\alpha' \cdot \alpha^{-1} = f_{\#}(\gamma' \cdot \gamma^{-1})$ dans X est homotope à un lacet de la forme $p_{\#}(\beta)$ où β est un lacet dans E basé en x_0 . Autrement dit, les chemins $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ et α' sont homotopes à extrémités fixées dans X . Ils se relèvent donc en des chemins de même extrémités. Or l'unique relèvement d'origine $\tilde{x}_0$ de $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ est $\beta \cdot \tilde{\alpha}$. On conclut que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$. Nous définissons alors $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$ ne dépend pas du choix du chemin γ .

Il nous reste à démontrer la continuité de $\tilde{f}$. Soit y un point quelconque de Y . Par construction nous avons une section locale σ définie sur un ouvert trivialisant O contenant $f(y)$ et telle que $\tilde{f}(y) = \sigma \circ f(y)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\tilde{f} = \sigma \circ f$ au voisinage de y . Soit donc U un voisinage connexe par arcs de y tel que $f(U)$ soit inclus dans O . Soit z un point de U , nous pouvons alors trouver un chemin de y_0 à z tel que $c(1/2) = y$ et $c[1/2, 1]$ soit inclus dans U . Soit par ailleurs $\tilde{f}_c$ le relèvement de $f \circ c$ partant de $\tilde{x}_0$. D'après ce que nous avons vu, $\tilde{f}_c(1/2) = \tilde{f}(y)$. Nous en déduisons par unicité du relèvement des chemins que $\sigma^i \circ f \circ c$ coïncide avec $\tilde{f}_c$ sur l'intervalle $[1/2, 1]$. En particulier, $\sigma^i f(z) = \sigma^i \circ f \circ c(1) = \tilde{f}(z)$.

EXEMPLE : Une application $f : U \rightarrow U$ se relève à travers le revêtement $z \mapsto z^n$ si et seulement si elle représente une classe d'homotopie divisible par n . Autrement dit, si et seulement si son degré est divisible par n .

En particulier,

Corollaire 25.3.1. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement, soit $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0 . Soit Y un espace connexe par arcs, simplement connexe et localement connexe par arcs, avec point base y_0 . Toute application continue $f : Y \rightarrow X$ envoyant y_0 en x_0 possède un (unique) relèvement à E d'origine $\tilde{x}_0$.

□

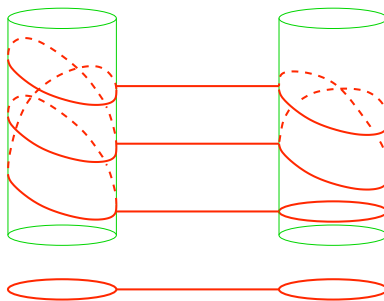
REMARQUES : Supposons E connexe par arcs. La réciproque du corollaire 25.2.5 est vraie si et seulement si E est simplement connexe.

Lemme 25.3.2. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Supposons E connexe par arcs. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents.

1. Pour tout lacet α , $\tilde{\alpha}$ est un lacet $\Rightarrow \alpha$ est homotope à une constante.
2. E est simplement connexe.

DÉMONSTRATION : Si E est simplement connexe, un relèvement $\tilde{\alpha}$ qui est un lacet est homotope à une constante, donc $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ l'est aussi. Réciproquement, soit $\tilde{\gamma}$ un lacet dans E basé en $\tilde{x}_0$. C'est un relèvement du lacet $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Par hypothèse, γ est homotope à une constante dans X . Soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie du lacet constant 1_{x_0} à γ . Comme 1_{x_0} se relève en le lacet constant $1_{\tilde{x}_0}$, F se relève en $\tilde{F}$, qui est une homotopie de $1_{\tilde{x}_0}$ à $\tilde{\gamma}$. $\square$

EXERCICE : La figure suivante représente un revêtement à 3 feuillets. Soit x_0 le sommet de droite de X . Déterminer les relèvements de divers lacets basés en x_0 , pour diverses origines $\tilde{x}_0$. En déduire que certains lacets ne sont pas homotopes à une constante.



Chapter 26

Revêtement universel

26.1 Construction d'un revêtement simplement connexe

Supposons que X admette un revêtement $p : E \rightarrow X$ simplement connexe. Soit $U \subset X$ un ouvert trivialisant. Alors tout lacet γ contenu dans U se relève en un lacet $\tilde{\gamma}$ de E . Comme $\tilde{\gamma}$ est homotope à une constante, il en est de même de $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Cela motive la définition suivante.

Définition 26.1.1. *Un espace connexe par arcs X est dit semi-localement simplement connexe si tout point x admet un voisinage U tel que tout lacet basé en x , contenu dans U soit homotope à une constante dans X .*

Théorème 55. *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors X possède un revêtement E connexe et simplement connexe.*

Topologie de la convergence uniforme

Définition 26.1.2. *Si Y et X sont deux espaces topologiques, la topologie de la convergence uniforme sur tout compact sur l'espace $C(Y, X)$ des applications continues de X sur Y est la topologie engendrée par les ouverts $\mathcal{E}_{K,U}$ où K est un compact de Y , U est un ouvert de X et*

$$\mathcal{E}_{K,U} = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

Nous avons alors

Lemme 26.1.3. *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit γ un chemin. Il existe alors un voisinage O de γ dans $C([0, 1], X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, tel que tout chemin de même extrémités que γ appartenant à U est homotope à γ .*

DÉMONSTRATION : Soit $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1$ une subdivision de l'intervalle, U_i des voisinages de $\gamma(t_i)$

- Tout lacet tracé dans U_i est homotope à une constante.
- $U_i \cap U_{i+1}$ contient un voisinage O_i de $\gamma(t_i)$ connexe par arcs.

- $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subset U_i$.

Nous laissons au lecteur le soin de montrer que de tels voisinages et subdivision existent. Soit

$$O = \{c \in C([0, 1], X) \mid \gamma[t_i, t_{i+1}] \subset U_i, \gamma(t_i) \in O_i\}.$$

Par définition de la topologie de la convergence uniforme O est un ouvert. Par ailleurs, soit c un chemin appartenant à O joignant les extrémités de γ . Nous allons montrer que c est homotope à γ . Notons c_i et γ_i les restrictions de c et γ à l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Soit l_i des chemins tracés dans O_i joignant $c(t_i)$ à $\gamma(t_i)$. Alors $\gamma_i \cdot l_{i+1}^{-1} \cdot c^{-1}l_i$ est homotope à une constante en particulier

$$c_i \sim l_i \cdot \gamma_i \cdot l_{i+1}^{-1}.$$

Ainsi

$$c \sim c_0 \cdot c_1 \dots c_{n-1} \sim \gamma_0 \cdot \gamma_1 \dots \gamma_{n-1} \sim \gamma.$$

C'est ce que nous voulions démontrer. $\square$

Démonstration du théorème 55

DÉMONSTRATION : Fixons $x_0 \in X$. Soit C_{x_0} l'espace des chemins d'origine x_0 dans X , muni de la topologie de la convergence uniforme.

C'est un espace topologique connexe par arcs. En effet, chaque chemin γ se joint au chemin constant par l'application – dont il faut montrer qu'elle est continue – $\gamma_s(t) = \gamma(st)$.

On note $\tilde{p} : C_{x_0} \rightarrow X$, $\gamma \mapsto \gamma(1)$. On note $E = C_{x_0} / \sim$ l'espace quotient de C_{x_0} par la relation d'homotopie à extrémités fixées. Il est lui aussi connexe par arcs. L'application $\tilde{p}$ passe au quotient en une application continue $p : E \rightarrow X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$.

p est un revêtement. En effet, soit $x \in X$, soit U le voisinage de x donné par l'hypothèse de simple connexité semi-locale. Quitte à le rétrécir, on peut supposer U connexe par arcs. Notons I l'ensemble des classes d'homotopie à extrémités fixées de chemins reliant x_0 à x . Pour chaque $x' \in U$, fixons un chemin $\delta_{x'}$ reliant x' à x dans U . Posons

$$U_i = \{[\gamma] \mid p(\gamma) \in U, [\gamma \cdot \delta_{p(\gamma)}] = i\}.$$

Comme tout les lacets tracés dans U sont homotopes à une application constante, U_i ne dépend pas du choix des chemins $\delta_{x'}$. D'après le lemme 26.1.3, chaque ensemble U_i est ouvert. De plus, l'hypothèse de simple connexité semi-locale, les ouverts U_i sont disjoints et p est une bijection de U_i sur U . On vérifie enfin, toujours en utilisant le lemme 26.1.3, que p est une application ouverte. Nous venons donc de montrer que p est un revêtement.

E est simplement connexe. On utilise la remarque 25.3.2. Il suffit de montrer que si un lacet α se relève en un lacet σ de E , alors α est homotope à une constante. Pour chaque $t \in [0, 1]$, $\sigma(t)$ est un chemin de x_0 à $\alpha(t)$.

Par définition de la topologie de la convergence uniforme, on vérifie que l'application qui à t associe le lacet $\sigma(t)^{-1} \alpha_{|[0,t]}$ est continue et donc constant car à valeurs dans un espace discret. Par conséquent, le lacet $\sigma(1)$ est homotope à α . Autrement dit, si σ est un lacet, α est homotope à une constante. $\square$

26.2 Propriété universelle

Proposition 26.2.1. *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe par arcs et simplement connexe de X . Soit $p' : E' \rightarrow X$ un autre revêtement. Soit $\tilde{x}_0 \in E$ et $\tilde{x}'_0$ des relèvements d'un même point base $x_0 \in X$. Alors il existe un unique morphisme $m : E \rightarrow E'$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$.*

DÉMONSTRATION : D'après le Corollaire 25.3.1, l'application $p : E \rightarrow X$ possède un relèvement $\tilde{p} : E \rightarrow E'$, tel que $p = p' \circ \tilde{p}$ et $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$. C'est un morphisme de revêtements. Inversement, si $m : E \rightarrow E'$ est un morphisme de revêtements, alors $p = p' \circ m$, donc m est un relèvement de p . D'après le Corollaire 25.3.1, la condition sur les points bases le rend unique. $\square$

REMARQUES : Lorsque E' est connexe, $m : E \rightarrow E'$ est un revêtement. On peut donc penser au revêtement E' comme à un revêtement intermédiaire entre X et E .

EXEMPLE : Les revêtements finis du cercle $z \mapsto z^n$, $U \rightarrow U$, sont eux mêmes revêtus par le revêtement exponentiel.

26.2.1 Unicité du revêtement simplement connexe

Théorème 56. *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit $x_0 \in X$ un point base. Soit $p : E \rightarrow X$ et $p' : E' \rightarrow X$ deux revêtements connexes et simplement connexes de X . Soit $\tilde{x}_0 \in E$ et $\tilde{x}'_0 \in E'$ des relèvements de x_0 . Il existe un unique isomorphisme de revêtements $f : E \rightarrow E'$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$.*

DÉMONSTRATION : Résulte de la propriété universelle. $\square$

Autrement dit, une fois fixés des points bases, le revêtement connexe et simplement connexe de X est canoniquement défini, i.e. unique à unique isomorphisme près.

Terminologie. On appelle le revêtement simplement connexe *revêtement universel*.

EXERCICE : Soit X le graphe de l'exercice 25.3. Déterminer le revêtement universel de X (c'est un arbre infini de valence 3, comment s'enroule-t-il autour de X ?)

26.2.2 Automorphismes du revêtement universel

Notation. On note $\text{Aut}(E/X)$ le groupe des automorphismes d'un revêtement $p : E \rightarrow X$.

Théorème 57. *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement simplement connexe de X . Alors Pour tout $x_0 \in X$, $\text{Aut}(E/X)$ agit simplement transitivement sur $p^{-1}(x_0)$.*

DÉMONSTRATION : Cela résulte du théorème 56 : étant donnés deux relèvements $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}'_0$ de x_0 , il existe un unique isomorphisme du revêtement $f : E \rightarrow E$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$. $\square$

EXEMPLE : Pour le revêtement exponentiel, les automorphismes du revêtement sont les translations d'un multiple de 2π .

Chapter 27

Revêtements et groupe fondamental

On s'oriente vers la classification des revêtements d'un espace X . On va voir que X admet presque toujours un revêtement connexe plus grand que tous les autres (les autres en sont des quotients), c'est celui qui est simplement connexe.

Commençons par un exemple

Revêtements du cercle

Proposition 27.0.1. *Tout revêtement connexe du cercle est isomorphe ou bien au revêtement exponentiel $\mathbb{R} \rightarrow U$, ou bien à l'un (et un seul) des revêtements $z \mapsto z^n$, $n \geq 1$.*

DÉMONSTRATION : Soit $p : E \rightarrow U$ un revêtement. L'application exponentielle $t \mapsto e^{it}$, $\mathbb{R} \rightarrow U$ admet un relèvement $f : \mathbb{R} \rightarrow E$. Alors f est un morphisme de revêtements.

Si f est injective, f est un isomorphisme, c'est fini.

Supposons f non injective. Si $t < t' \in \mathbb{R}$ et $f(t) = f(t')$, alors $e^{it} = e^{it'}$ donc $t' - t$ est un multiple entier strictement positif de 2π . Soit $2\pi n$ le plus petit multiple rencontré, i.e. il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0 + 2\pi n) = f(t_0)$. Pour $s \in \mathbb{R}$, notons $\gamma_s = p \circ f_{[s, s+2\pi n]}$. C'est un lacet dans U . Comme tous les γ_s sont homotopes et γ_{t_0} admet un relèvement à E , il en est de même de γ_s . Comme le relèvement $\tilde{\gamma}_{t_0}$ est un lacet, il en est de même de $\tilde{\gamma}_s$. Autrement dit, $f(s + 2\pi n) = f(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Par conséquent, f passe au quotient en $g : \mathbb{R}/2\pi n\mathbb{Z} \rightarrow E$ qui est un morphisme de revêtements injectif, donc un isomorphisme.

Le degré permet de distinguer les revêtements $z \mapsto z^n$ entre eux. En effet, si $p : U \rightarrow U$ et $p' : U \rightarrow U$ sont des revêtements, et $m : U \rightarrow U$ un homéomorphisme tel que $p' \circ m = p$, alors $\deg(p) = \deg(m)\deg(p') = \pm \deg(p')$. $\square$

Réglons d'abord le sort des revêtements non connexes.

27.1 Revêtements non connexes

Définition 27.1.1. *Un espace topologique X est dit localement connexe (resp. par arcs) si tout point possède une base de voisinages connexes (resp. par arcs).*

Proposition 27.1.2. *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Supposons X localement connexe par arcs. Soit E' une composante connexe de E . Alors $p|_{E'} : E' \rightarrow X$ est un revêtement.*

Autrement dit, un revêtement non connexe est une union disjointe de revêtements connexes.

DÉMONSTRATION : Soit $x \in X$, soit U un voisinage trivialisant de x , i.e. il existe des sections s_i au-dessus de U telles que $p^{-1}(U) = \sqcup_i s_i(U)$. Quitte à rétrécir U , on peut le supposer connexe. Alors les $s_i(U)$ sont connexes, donc chacun est ou bien contenu dans ou bien disjoint de E' . Par conséquent,

$$p|_{E'}^{-1}(U) = p^{-1}(U) \cap E' = \sqcup_{\{i \mid s_i(U) \subset E'\}} s_i(U).$$

□

27.2 Action sur la fibre

Notation. On note toujours $\text{Aut}(E/X)$ le groupe des automorphismes d'un revêtement $p : E \rightarrow X$.

Définition 27.2.1. *Soit γ un lacet basé en x_0 . Soit $\tilde{x}_0$ un point de $p^{-1}(x_0)$. Soit $\tilde{\gamma}$ le relevé de γ partant de $\tilde{x}_0$. Nous définissons l'action à droite de $\pi_1(X, x_0)$ sur $p^{-1}(x_0)$ par*

$$\tilde{x}_0 \cdot [\gamma] := \tilde{\gamma}(1).$$

On vérifie aisément que ceci définit une action à droite de $\pi_1(X, x_0)$ sur $p^{-1}(x_0)$.

Théorème 58. *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement de X . Alors*

1. *L'action à droite de $\pi_1(X, x_0)$ sur $p^{-1}(x_0)$ est transitive et commute avec l'action à gauche de $\text{Aut}(E/X)$.*
2. *Le stabilisateur de $\tilde{x}_0$ est le sous-groupe $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$.*
3. *Enfin si E est simplement connexe, cette action est simplement transitive, et le choix d'un point $\tilde{x}_0$ dans $p^{-1}(x_0)$ définit un isomorphisme de $\pi_1(X, x_0)$ avec $\text{Aut}(E/X)$.*

Corollaire 27.2.2. *Si $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ sont deux éléments de la fibre $p^{-1}(x_0)$, les sous-groupes $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}))$ et $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'))$ sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$. Tous les sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$ conjugués à $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}))$ sont de la forme $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'))$ pour un choix de $\tilde{x}'$.*

Ce corollaire découle d'une propriété générale pour les actions transitives.

DÉMONSTRATION :

1. L'action est transitive, car un chemin entre deux points de la fibre est le relèvement de son image dans X et cette image est un lacet. Cette action, qui ne fait pas intervenir de choix d'origine dans E , commute avec l'action à gauche de $\text{Aut}(E/X)$. Plus précisément, si ϕ est un automorphisme du revêtement, $\tilde{x}_0$ un point de la fibre, $\tilde{\gamma}$ le relevé du lacet γ partant de $\tilde{x}_0$, alors $\phi \circ \tilde{\gamma}$ est le relevé du lacet γ partant de $\phi(\tilde{x}_0)$. Autrement dit

$$\phi(\tilde{x}_0 \cdot [\gamma]) = \phi(\tilde{\gamma}(1)) = \phi \circ \tilde{\gamma}(1) = \phi(\tilde{x}_0) \cdot [\gamma].$$

C'est-à-dire les actions de $\text{Aut}(E/X)$ et du groupe fondamental commutent.

2. Si un lacet stabilise un point, cela signifie qu'il se relève en un lacet de E et donc qu'il appartient à $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$.
3. Supposons E simplement connexe. Fixons un relèvement $\tilde{x}_0$. L'application, bijective par le deuxième point et le théorème 58, $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(E/X)$ qui à $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ associe l'unique $f \in \text{Aut}(E/X)$ tel que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$ est un isomorphisme de groupes car les deux actions commutent.

□

EXERCICE : Soit $p : X \rightarrow E$ le revêtement de l'exercice 25.3. Vérifier, pour quelques exemples, que les lacets de X qui se relèvent en des lacets de E sont bien dans l'image du groupe fondamental $\pi_1(E, \tilde{x}_0)$ (cela dépend de $\tilde{x}_0$) ?

27.3 Construction de revêtements intermédiaires

On a vu que le revêtement $z \mapsto z^n$ du cercle unité U pouvait s'obtenir en quotientant le revêtement universel $t \mapsto e^{it}$ par le sous-groupe $2\pi n\mathbb{Z}$ du groupe de ses automorphismes. Cette construction est générale.

Théorème 59. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement simplement connexe. Soit H un sous-groupe du groupe $\text{Aut}(E/X)$ des automorphismes de E . Alors

1. L'espace quotient $E' = H \div E$ est séparé et la projection $E \rightarrow H \div E = E'$ est un revêtement. Le groupe $\text{Aut}(E/E')$ coïncide avec H .
2. La projection p passe au quotient en un revêtement $p' : E' \rightarrow X$.
3. Le groupe fondamental de E' est isomorphe à H , l'isomorphisme est obtenu en composant $p'_{\#} : \pi_1(E', \tilde{x}'_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ et l'isomorphisme $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(E/X)$ du théorème 58.

DÉMONSTRATION : Soit $\tilde{x}, \tilde{y}$ deux points de E qui ne sont pas dans la même orbite de H .

Premier cas : $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$. Notons $x = p(\tilde{x})$. Soit U un voisinage ouvert trivialisant de x dans X , i.e. il existe des sections locales s_j au-dessus de U , indexées par les éléments de $J = p^{-1}(x)$, telles que $p^{-1}(U) = \sqcup_{j \in p^{-1}(x)} s_j(U)$. Le groupe $\text{Aut}(E/X)$ agit simplement transitivement sur $p^{-1}(x)$. Alors $V_{\tilde{x}} = \sqcup_{j \in H\tilde{x}} s_j(U)$ et $V_{\tilde{y}} = \sqcup_{j \in H\tilde{y}} s_j(U)$ sont des ouverts saturés de E contenant respectivement les orbites de $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$. Il leur correspond des voisinages disjoints dans l'espace quotient $E' = H \div E$.

Deuxième cas : $p(\tilde{x}) \neq p(\tilde{y})$. Alors c'est encore plus simple. Soit U_x et U_y des voisinages trivialisants disjoints de $x = p(\tilde{x})$ et $y = p(\tilde{y})$ dans X . Alors $p^{-1}(U_x)$ et $p^{-1}(U_y)$ sont des voisinages saturés de E contenant respectivement les orbites de $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$. Il leur correspond des voisinages disjoints dans l'espace quotient $E' = H \div E$. Ceci prouve que E' est séparé.

L'application p passe au quotient par définition même des automorphismes de revêtement. Si $x \in X$, soit $J \subset p^{-1}(x)$ un sous-ensemble qui contient exactement un représentant de chaque orbite de H , soit U un voisinage trivialisant de x dans X . Alors l'ouvert $V_J = \sqcup_{h \in H} s_{hj}(U)$ coupe chaque orbite de H en un seul point, cela définit une section $s'_J : U \rightarrow E'$ de p' au-dessus de U , et $p'^{-1}(U) = \sqcup_{i \in J} V_i$, donc p' est un revêtement, et la projection $m : E \rightarrow E'$ un morphisme de revêtements.

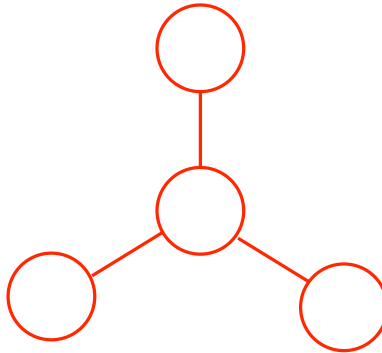
Soit $\tilde{x}_0$ un point base dans E . Soit $h \in H$, soit γ un chemin de $\tilde{x}_0$ à $h\tilde{x}_0$ dans E . Son image dans E' est un lacet γ' basé en $\tilde{x}'_0 = m(\tilde{x}_0)$. Notons $\alpha = p' \circ \gamma' = p \circ \gamma$. C'est un lacet dans X basé en $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, et représentant la classe $p_{\#}([\gamma']) \in \pi_1(X, x_0)$. D'après le théorème 58, il lui correspond la transformation de revêtement $g \in \text{Aut}(E/X)$ telle que $g(\tilde{x}_0)$ soit l'extrémité de l'unique relèvement de α d'origine $\tilde{x}_0$ dans E . Or ce relèvement, c'est γ , donc $g = h$. Inversement, si α' est un lacet dans E' basé en $\tilde{x}'_0$, il possède un relèvement γ' d'origine $\tilde{x}_0$ dans E , d'extrémité $g(\tilde{x}_0)$. Comme $m(g(\tilde{x}_0)) = m(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$, $g \in H$, donc $\simeq \text{op}_{\#}([\alpha']) \in H$.

On a donc montré que l'image de $\simeq \text{op}_{\#} : \pi_1(E', \tilde{x}'_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(E/X)$ est exactement le sous-groupe H . L'injectivité de cet homomorphisme résulte du lemme suivant. $\square$

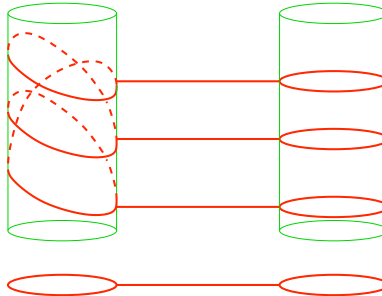
Lemme 27.3.1. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0 . La projection p induit un homomorphisme injectif $p_{\#} : \pi_1(E, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

DÉMONSTRATION : En effet, soit $\gamma \in E$ un lacet basé en $\tilde{x}_0$. Supposons $\alpha = p \circ \gamma$ homotope à une constante. Alors l'homotopie F de α au lacet constant $1_{\tilde{x}_0}$ se relève en une homotopie de γ à un lacet contenu dans un fibre, donc constant. On conclut que γ est trivial dans $\pi_1(E, \tilde{x}_0)$, donc que $p_{\#}$ est injective. $\square$

EXERCICE : Soit E le graphe de la figure suivante. Vérifier que l'action du groupe H des rotations d'ordre 3 sur E définit un revêtement $E \mapsto H \div E = X$, et le représenter graphiquement dans le style de la figure de l'exercice 25.3.



Solution.



27.4 Classification des revêtements connexes

On va établir une bijection entre classes d'isomorphismes de revêtements connexes $p : E \rightarrow X$ et classes de conjugaison de sous-groupes $H \subset \pi_1(X, x_0)$.

Théorème 60. Soit $p : E \rightarrow X$ et $p' : E' \rightarrow X$ des revêtements connexes, $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ et $\tilde{x}'_0 \in E'$ des relèvements de x_0 .

1. Il existe un morphisme de revêtements $m : E \rightarrow E'$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$ si et seulement si $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$.
2. Il existe un morphisme de revêtements $m : E \rightarrow E'$ si et seulement s'il existe un conjugué de $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ dans $\pi_1(X, x_0)$ qui est contenu dans $p_{\#}(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$.
3. Les revêtements E et E' sont isomorphes si et seulement si $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ et $p_{\#}(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$ sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$.

DÉMONSTRATION : Un morphisme de revêtements $m : E \rightarrow E'$, c'est la même chose qu'un relèvement de $p : E \rightarrow X$ à E' . □

Corollaire 27.4.1. Supposons X connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. L'application qui à un revêtement $p : E \rightarrow X$ associe le sous-groupe $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$ induit une bijection entre classes d'isomorphisme de revêtements et classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$. La bijection réciproque consiste à quotienter le revêtement universel de X par un sous-groupe de son groupe d'automorphismes.

DÉMONSTRATION : Résulte des propositions 59 et 60. □

EXEMPLE : Il y a autant de revêtements du cercle, à isomorphisme près, que de sous-groupes dans $\mathbb{Z}$.

Comme $\mathbb{Z}$ est commutatif, il n'y a pas lieu de parler de conjugaison.

REMARQUES : Dans cette correspondance entre revêtements connexes pointés et sous-groupes du groupe fondamental, il y a aussi une correspondance entre morphismes et injections de sous-groupes. On parle d'équivalence de catégories.

27.4.1 Revêtements galoisiens

On se demande si, en dehors du revêtement universel, il existe des revêtements qui possèdent beaucoup d'automorphismes.

EXEMPLE : Le revêtement à 3 feuillets de l'exercice 25.3 ne possède aucun automorphisme autre que l'identité.

En effet, le graphe E contient un sommet uniquement caractérisé par la propriété suivante : les deux extrémités d'une même arête s'y confondent. Tout homéomorphisme (et *a fortiori* tout automorphisme) doit fixer ce point. Or un automorphisme qui fixe un point

est l'identité. Autrement dit, étant donné un point de E , il n'est pas possible de choisir continûment un point parmi les deux autres points de sa fibre.

Sachant qu'un automorphisme est uniquement déterminé par son action sur une fibre, ce qu'on peut demander de plus, c'est la transitivité sur une fibre.

Définition 27.4.2. *Un revêtement $p : E \rightarrow X$ est dit galoisien si son groupe d'automorphismes $\text{Aut}(E/X)$ agit transitivement sur les fibres.*

REMARQUES : Si X est connexe, il suffit que ce soit vrai pour une fibre.

En effet, l'ensemble des $x \in X$ tels que $\text{Aut}(E/X)$ agisse transitivement sur $p^{-1}(x)$ est une réunion d'ouverts trivialisants, donc est ouvert et fermé.

EXEMPLE : Les revêtements triviaux, le revêtement universel sont galoisiens.

Proposition 27.4.3. *On suppose X localement connexe par arcs. Un revêtement connexe $p : E \rightarrow X$ est galoisien si et seulement si le sous-groupe $p_{\#}(\pi_1(E)) \subset \pi_1(X)$ est distingué. Dans ce cas, $\text{Aut}(E/X) \simeq \pi_1(X)/p_{\#}(\pi_1(E))$ (isomorphisme qui dépend du choix d'un point base).*

DÉMONSTRATION : Un morphisme de revêtement, c'est un relèvement de p . D'après le critère de relevabilité, il existe un morphisme de revêtement envoyant $\tilde{x}_0$ sur $\tilde{x}'_0$ si et seulement si $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'_0))$, et un automorphisme si et seulement si $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'_0))$. Donc, avec le corollaire 27.2.2, si $\text{Aut}(E/X)$ est transitif, tous les conjugués de $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ coïncident, donc ce sous-groupe est distingué. Et réciproquement.

Si $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ est distingué, il agit trivialement (à droite) sur la fibre de x_0 . Par conséquent, le groupe quotient $G = \pi_1(X, x_0)/p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ agit à droite sur la fibre, simplement transitivement d'après la proposition ???. De son côté, le groupe $\text{Aut}(E/X)$ agit à gauche simplement transitivement sur la fibre, les deux actions commutent, ce qui donne un isomorphisme entre les deux groupes. $\square$

EXEMPLE : Existe-t'il des revêtements non galoisiens à deux feuillets ?

Plus généralement,

Proposition 27.4.4. *On suppose X localement connexe par arcs. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe, soit $\tilde{x}_0$ et x_0 des points bases. Notons $G = \pi_1(X, x_0)$ et $H = p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$. Soit $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G , i.e. l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $g^{-1}Hg \subset H$. Alors $\text{Aut}(E/X) \simeq N_G(H)/H$ (isomorphisme qui dépend du choix d'un point base).*

DÉMONSTRATION : Soit $g \in G$. Alors $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot g)) = g^{-1}p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))g = g^{-1}Hg$. D'après le critère de relevabilité, il existe $h \in \text{Aut}(E/X)$ tel que $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot g$ si et seulement si $g^{-1}Hg \subset H$. Autrement dit, l'orbite à gauche de $\tilde{x}_0$ sous $\text{Aut}(E/X)$ coïncide avec l'orbite à droite de $\tilde{x}_0$ sous $N_G(H)$. Sur cette orbite, $\text{Aut}(E/X)$ agit à gauche simplement transitivement. D'après la proposition ??, le stabilisateur de $\tilde{x}_0$ est H . Or H est distingué dans $N_G(H)$, donc H fixe chaque point de l'orbite. Autrement dit, le groupe quotient $N_G(H)/H$ agit à droite

simplement transitivement sur l'orbite. Les deux actions commutent, ce qui donne un isomorphisme entre les deux groupes. $\square$

EXEMPLE : Cas du revêtement non galoisien à 3 feuillets de l'exercice 25.3.

Prenons le sommet spécial de E comme point base $\tilde{x}_0$, et x_0 son image. Le graphe X a une connectivité égale à 4, donc son groupe fondamental est un groupe libre à 2 générateurs a et b , où a est représenté par la boucle de sommet x_0 et b par un lacet qui va faire le tour de l'autre boucle sans repasser par x_0 . Pour spécifier uniquement a et b , il suffit d'orienter chacune des boucles. Ces orientations se relèvent à E .

Le graphe E a une connectivité égale à 4, donc son groupe fondamental est un groupe libre à 4 générateurs c, d, e et f , où

- c est représenté par la boucle de sommet $\tilde{x}_0$ parcourue dans le sens positif, de sorte que $p_{\#}(c) = a$,
- d par un lacet qui ne recoupe pas la fibre de x_0 , parcouru dans le sens positif, de sorte que $p_{\#}(d) = b^3$,
- e par un lacet obtenu comme suit : on traverse de x_0 au sommet du bas à gauche, on monte positivement d'un tour le long de c , on traverse de gauche à droite au niveau 2, on suit positivement la boucle qui entoure deux fois le second cylindre jusqu'au niveau 3, on retransverse de droite à gauche, on redescend positivement le long de c , et on rejoint x_0 , de sorte que $p_{\#}(e) = bab$,
- f obtenu comme suit : on traverse de x_0 au sommet du bas à gauche, on monte positivement d'un tour le long de c , on traverse de gauche à droite au niveau 2, on fait positivement le tour complet de la boucle qui entoure deux fois le second cylindre, ce qui ramène au niveau 2, on retransverse de droite à gauche, on redescend négativement le long de c , et on rejoint x_0 , de sorte que $p_{\#}(f) = ba^2b^{-1}$.

Il résulte de la proposition 27.4.4 que le normalisateur dans $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ du sous-groupe engendré par a, b^3, bab et ba^2b^{-1} est réduit à ce sous-groupe. Il résulte de la proposition ?? que le sous-groupe de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ engendré par a, b^3, bab et ba^2b^{-1} est d'indice 3. Ce n'est pas facile à montrer directement. C'est une illustration du fait que la théorie des revêtements est réellement utile pour démêler des questions combinatoires sur les groupes. Voici une autre illustration.

Théorème 61. Nielsen-Schreier. *Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

DÉMONSTRATION : Puisqu'on n'a parlé que de graphes finis et de groupes libres de type fini, seul le cas des sous-groupes d'indice fini d'un groupe libre de type fini est à notre portée. Voici tout de même l'argument général. Tout groupe libre est le groupe fondamental d'un graphe. Tout sous-groupe est le groupe fondamental d'un revêtement de ce graphe (proposition 59). Comme un revêtement d'un graphe est un graphe, et comme le groupe fondamental d'un graphe est libre (proposition 24.3.1, dans le cas des graphes finis), le sous-groupe est libre. $\square$

27.4.2 Revêtements du tore

EXERCICE : Classifier les revêtements connexes du tore $T^2 = \mathbb{Z}^2 \div \mathbb{R}^2$.

Solution.

D'après la proposition 59, La projection $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$ est un revêtement. Comme $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, il s'agit du revêtement universel. En particulier, T^2 est connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Le groupe d'automorphismes de ce revêtement est le groupe $\mathbb{Z}^2$ agissant par translations sur $\mathbb{R}^2$.

D'après le corollaire 27.4.1, il y a exactement autant de revêtements de T^2 que de sous-groupes du groupe $\mathbb{Z}^2$, le revêtement associé à un sous-groupe H est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par H agissant par translations sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{Z}^2$ est commutatif, le revêtement est automatiquement galoisien, son groupe d'automorphisme, isomorphe à $\mathbb{Z}^2/H$, agit simplement transitivement sur chaque fibre, en particulier sur la fibre de $0 \in T^2$, qui est constituée des "points à coordonnées entières" de E .

Un groupe abélien de type fini possède un rang, nombre de générateurs minimal de sa partie libre. Dans le cas d'un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$, le rang est inférieur ou égal à 2.

Lorsque le rang vaut 0, $H = \{0\}$, $E = \mathbb{R}^2$ est le revêtement universel.

Lorsque le rang vaut 1, H est engendré par un vecteur entier v . E est homéomorphe à un cylindre. Si v est primitif (i.e. ses composantes sont des entiers premiers entre eux), le groupe quotient $\mathbb{Z}^2/H$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Dans ce cas, chaque orbite de ce groupe (qui s'identifie à une fibre de la projection $E \rightarrow T^2$ car le revêtement est galoisien) est une spirale qui passe par tous les points entiers du cylindre. Si d est le pgcd des composantes de v , le groupe quotient $\mathbb{Z}^2/H$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$. Un élément (le générateur v/d de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$) agit par rotation pure autour de l'âme du cylindre. Les points entiers du cylindre se regroupent en d spirales disjointes permutées circulairement par v/d .

Lorsque le rang vaut 2, il existe une base (a, b) de $\mathbb{Z}^2$ et deux entiers d et d' (d' multiple de d) telle que H ait pour base da et $d'b$. Alors le groupe d'automorphismes du revêtement est isomorphe à $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/d'\mathbb{Z})$, il est fini. L'espace E est un tore, ses points entiers se regroupent de deux manières en spirales qui se referment, à d points et d' points respectivement. Lorsque $d = d' = 1$, et seulement dans ce cas, le revêtement est trivial.

27.5 A retenir

Soit X un espace connexe, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe.

1. Tout revêtement connexe de X est un quotient $H \div \tilde{X}$ du revêtement universel $\tilde{X}$ par un sous-groupe H de $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \simeq \pi_1(X)$.
2. Deux revêtements de ce type sont isomorphes si et seulement si les sous-groupes sont conjugués.
3. Le revêtement $E = H \div \tilde{X}$ est galoisien si et seulement si H est distingué, et dans ce cas $\text{Aut}(E/X) \simeq \pi_1(X)/H$.

Part IV

Géométrie différentielle

Chapter 28

Sous-variétés

28.1 Difféomorphismes, immersions et submersions

Soit f une application de classe C^1 d'un espace affine dans un autre. On notera par $D_x f$ sa différentielle au point x .

28.1.1 Définitions

Définition 28.1.1. Soit U et V deux ouverts d'espaces affines E et F de dimension finie et f une application de classe C^r définie de U à valeurs dans V , pour $r \geq 1$.

- (i) L'application f est un C^r -difféomorphisme de U sur V , si f est une bijection de classe C^r ainsi que sa réciproque.
- (ii) L'application $f : U \rightarrow F$ de classe C^r est une immersion en $x \in U$ si sa différentielle en x est injective (i.e. si sa matrice jacobienne est de rang n).
- (iii) L'application f est une submersion en x de U si sa différentielle en x est surjective (i.e. si sa matrice jacobienne est de rang p). f est une submersion au dessus de $y \in F$ si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(y)$.

Il faut penser à un difféomorphisme d'un ouvert d'un espace affine à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ comme le choix de nouvelles coordonnées sur l'espace affine.

Nous utiliserons donc la définition suivante.

Définition 28.1.2. Soit m un point d'un espace affine $\mathcal{E}$. Une carte au voisinage de m est un couple (U, X) où U est un ouvert de $\mathcal{E}$ contenant m et $X = (x_1, \dots, x_n)$ est un difféomorphisme de U sur un ouvert $X(U)$ de $\mathbb{R}^n$. les fonctions $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de la carte.

Si un C^1 -difféomorphisme f est de classe C^r , alors f^{-1} est de classe C^r . On rappelle enfin le théorème d'inversion locale

28.1.2 Les théorèmes

Théorème 62. [INVERSION LOCALE] Soit U et V deux ouverts d'espaces affines E et F de dimension finie et f une application de classe C^r définie de U à valeurs dans V . Soit m un point de U telle que $D_m f$ est inversible. Alors f est un difféomorphisme au voisinage de m .

Le théorème d'inversion locale permet d'affiner notre compréhension des immersions et des submersions.

Théorème 63. [DES IMMERSIONS ET DES SUBMERSIONS] Soit f une application C^r d'un ouvert U d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension p à valeurs dans un espace affine $\mathcal{F}$ de dimension n . Alors

- (i) On suppose que f est une immersion en m . Alors, il existe un voisinage U de m , une carte (V, ϕ) au voisinage de $f(m)$, tel que $f(U) \subset V$, tels que $\phi \circ f$ définie de U dans $\mathbb{R}^n$ est une application affine injective.
- (ii) On suppose que f est une submersion en m . Alors, il existe une carte (U, ϕ) au voisinage x , tels que $f \circ \phi^{-1}$ est une application affine surjective de $\phi(U)$ dans $\mathcal{F}$.

Autrement dit, en choisissant de nouvelles coordonnées, une immersion devient une application linéaire injective et une submersion une application linéaire surjective.

DÉMONSTRATION : Traitons tout d'abord le premier cas. Nous choisissons des coordonnées linéaires sur E et F de façon à ce que $m = 0$, $f(m) = 0$ et $D_m f(u_1, u_2, \dots, u_p) = (u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0)$. Notons $f = (f_1, \dots, f_n)$. Nous considérons alors l'application F définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ par

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_p(x_1, \dots, x_p), f_{p+1}(x_1, \dots, x_p) + x_{p+1}, \dots, f_n(x_1, \dots, x_p) + x_n).$$

Par construction, la différentielle de F en m est l'identité. Par le théorème d'inversion locale, F est donc un difféomorphisme d'un voisinage U de x sur un voisinage V de $f(m)$. Posons $\phi = F^{-1}$, alors $\phi \circ f(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ est une application affine injective.

Traitons de manière analogue le deuxième cas. Nous avons ici $p \geq n$. Choisissons des coordonnées sur E et F de façon à ce que $x = 0$, $f(x) = 0$ et $D_x f(u_1, u_2, \dots, u_p) = (u_1, \dots, u_n)$. Notons $f = (f_1, \dots, f_n)$. Nous considérons alors l'application ϕ définie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$, par

$$\phi(x_1, \dots, x_p) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_p(x_1, \dots, x_p), x_{p+1}, \dots, x_n).$$

Par construction $D_m \phi$ est l'identité. D'après le théorème d'inversion locale ϕ est un difféomorphisme local. Alors par construction, $f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$ est une application linéaire surjective. $\square$

Ce dernier théorème se généralise

Théorème 64. [THÉORÈME DU RANG CONSTANT] Soit f une application de classe C^r tel que le rang de df est constant au voisinage de m . Alors il existe des coordonnées X au voisinage de m et Y au voisinage de $f(m)$ de classe C^r telles que $Y \circ f \circ X^{-1}$ est linéaire de même rang que $D_m f$.

28.2 Sous-variétés

Définition 28.2.1. Soit M un sous-ensemble d'un espace affine $\mathcal{E}$. M est une sous-variété de dimension d si pour tout point m de M il existe une carte (U, X) au voisinage de m tel que $X(U \cap M)$ est un sous-espace vectoriel de dimension d .

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Un ouvert d'une sous-espace affine est une sous-variété.

2. La réunion de deux droites parallèles est une sous variété.
3. Une sous-variété est localement connexe par arcs, et semi-localement simplement connexe.

Théorème 65. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^r .

- (i) Si f est une immersion en $x \in U$, alors il existe un ouvert $x \in U' \subset U$ tel que $f(U')$ est une sous-variété de classe C^r et de dimension n de $\mathbb{R}^p$.
- (ii) Si f est une submersion au dessus de $y \in \mathbb{R}^p$, alors $f^{-1}(y)$ est ou bien vide, ou bien une sous-variété de classe C^r et de dimension $n - p$ de $\mathbb{R}^n$.
- (iii) Le graphe Γ_f de f défini par

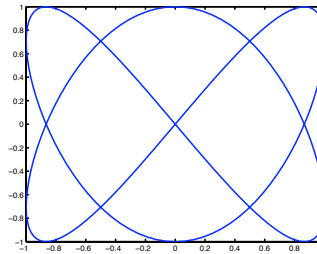
$$\Gamma_f = \{(x, F(y)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p,$$

est une sous-variété de dimension p .

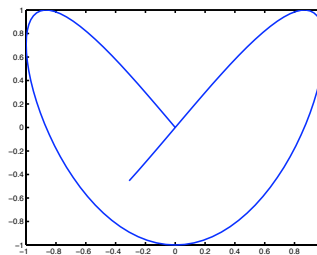
Théorème 66. Soit Φ un difféomorphisme d'un ouvert U d'un espace affine dans $\Phi(U)$. Si M est une sous-variété incluse dans U alors $\Phi(M)$ est une sous-variété.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. L'application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ est une immersion en tout point mais son image n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.



2. L'application $\eta :]-\pi/10, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ est une immersion en tout point, elle est injective, mais son image n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.



3. La fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ est une submersion au-dessus de tout réel non nul. Les sphères de rayon non nul sont donc des sous-variétés de dimension $n - 1$ (i.e. de codimension 1).

EXERCICE :

1. Vérifier que la projection stéréographique est une immersion du plan dans $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer de deux manières différentes que la sphère

$$S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\},$$

est une sous-variété. Tout d'abord en montrant que S^n est localement un graphe. D'une autre manière, en montrant que la sphère est la preimage d'un point par une submersion.

28.2.1 Espace tangent

On rappelle qu'une *courbe lisse* γ à valeurs dans un espace affine $\mathcal{E}$ est une application de classe C^1 d'un intervalle à valeurs dans $\mathcal{E}$. Le *vecteur tangent* à γ en t_0 est le vecteur de l'espace tangent à $\mathcal{E}$ défini par

$$\dot{\gamma}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Une courbe lisse est *tracée* sur une sous-variété X , si elle est à valeurs dans X .

Définition 28.2.2. Soit X une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$, et $x \in X$. L'espace tangent à X en x , noté $T_x X$, est l'ensemble des vecteurs tangents en x aux courbes contenues dans X et passant par x .

Théorème 67. Soit M une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$. L'espace tangent à X en x est un espace vectoriel de dimension d . De plus

- (i) si Φ est un difféomorphisme d'un ouvert U d'un espace affine dans un autre alors si x est dans U et $M \subset U$

$$T_{\Phi(x)} \Phi(M) = D_x \Phi(T_x(M)),$$

- (ii) Si $M = f(U)$ est l'image d'une immersion f , alors $T_{f(x)} M = \text{Im}(D_x f)$.
 (iii) Si $M = f^{-1}(y)$ est une fibre d'une submersion f , alors $T_x M = \ker(D_x f)$.
 (iv) Si $M \subset E \times F$ est le graphe d'une application f , alors $T_{(x, f(x))} M$ est le graphe de l'application linéaire $D_x f$.

En effet, si $\phi : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme qui redresse M sur $\mathbb{R}^d$ au voisinage de x , alors $T_x X = (D_x \phi)^{-1}(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 28.2.3. *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d si et seulement si au voisinage de tout point $x \in X$, X s'écrit comme le graphe d'une application f de $T_x X$ dans $(T_x X)^\perp$ telle que $f(0) = 0$ et $d_0 f = 0$. En particulier, si $y \in X$ est voisin de $x \in X$, la distance de y à $T_x X$ est un $o(|y - x|)$. De même, si $v \in T_x X$ est assez petit, la distance de $x + v$ à X est un $o(|v|)$.*

DÉMONSTRATION : Notons π la projection orthogonale sur $T_x X$. Soit $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion qui paramètre X au voisinage de x . Alors $\pi \circ g$ est une immersion de $\mathbb{R}^d$ dans $T_x X$ en 0 donc un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage U de 0 dans $T_x X$. Notons $h : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ le difféomorphisme réciproque. Alors $f = \pi^\perp \circ h : U \rightarrow (T_x X)^\perp$ est différentiable, sa différentielle en 0 est nulle, et son graphe coïncide avec X au voisinage de x . Si $v \in U$, $x + v + f(v) \in X$ donc $x + v$ est proche (en $o(|v|)$) de X .

L'application $y \mapsto y - f \circ \pi(y - x)$ est différentiable, sa différentielle en x est l'identité, c'est un difféomorphisme local qui redresse X sur le plan affine $x + T_x X$. Il déplace le point y d'une distance en $o(|y - x|)$, donc si $y \in X$, y est proche du plan tangent. $\square$

28.2.2 Courbes complexes affines et des quadriques

Définition 28.2.4. *Par définition une courbe complexe affine plane est une sous-variété X de $\mathbb{C}^2$ définie par*

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\},$$

où P est un polynôme à deux variables tel que $\frac{\partial P}{\partial z}$ et $\frac{\partial P}{\partial w}$ ne s'annule pas simultanément le long de X .

Les courbes complexes affine sont des *surfaces*, c'est-à-dire des sous-variétés de dimension 2.

Proposition 28.2.5. *Soit q une forme quadratique non dégénérée en $n + 1$ variables, de matrice S . Soit Q la quadrique affine de $\mathbb{R}^n$ définie par l'équation affine $q(x_1, \dots, x_n, 1) = 0$. Alors Q est une sous-variété de classe C^∞ , et son hyperplan tangent en $x = (x_1, \dots, x_n, 1)$ est défini par l'équation linéaire en v ,*

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n S_{i,j} x_i v_j + \sum_{j=1}^n S_{n+1,j} v_j = 0.$$

DÉMONSTRATION : Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note $p = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de composantes $(x_1, \dots, x_n, 1)$. L'équation de Q est $f(x) = q(p) = p^\top S p = 0$. Alors, pour $v \in \mathbb{R}^n$, $d_x f(v) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}^\top S p + p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 2p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$. Supposons que $x \in Q$. Notons $Sp = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$. Alors $f(x) = wx + z = 0$. Comme S est inversible et p non nul, Sp est non nul, donc $w \neq 0$ et $z \neq 0$. Alors la forme linéaire $d_x f : v \mapsto 2p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 2w^\top v$ est surjective. Autrement dit, f est une submersion au dessus de 0. En particulier, $Q = f^{-1}(0)$ est une sous-variété d'espace tangent $\ker(d_p)f$. $\square$

Chapter 29

Variétés

On voudrait traiter le cas des quadriques projectives. Pour cela, il faut définir la notion de sous-variété de l'espace projectif.

29.1 Cartes et atlas

Définition 29.1.1. Soit M un espace topologique.

- (i) Une carte sur M est une paire (U, X) où U est un ouvert de M et $X = (x_1, \dots, x_p)$ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Les fonctions x_i sont les coordonnées, l'ouvert U est le domaine de la carte, l'entier p est la dimension de la carte..
- (ii) Deux cartes (U, X) et (V, Y) sont C^∞ -compatibles si le changement de cartes $Y \circ X^{-1}$ de $X(U \cap V)$ vers $Y(U \cap V)$ est un C^r -difféomorphisme.
- (iii) Un atlas est un ensemble de cartes $\{(U_i, X_i)\}$ de même dimension qui sont C^∞ compatibles et telles que $\{U_i\}$ est un recouvrement de M .
- (iv) Deux atlas sont équivalents si toutes leurs cartes sont compatibles, ou de manière équivalente si la réunion est encore un atlas.
- (v) Une structure différentielle sur M est une classe d'atlas compatibles.

Ceci nous amène à la définition suivante

Définition 29.1.2. [VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES] Un espace topologique séparé, réunion dénombrable de compacts et muni d'une structure différentielle est une variété différentielle. Une carte est compatible avec la structure de variété si elle est compatible avec un atlas définissant la structure de variété.

Par abus de langage, on dira que les fonctions $(x_1, \dots, x_p)$ définies au voisinage de m sont des coordonnées au voisinage d'un point m d'une variété M si il existe un ouvert U contenant m tel que $(u, (x_1, \dots, x_p))$ est une carte compatible avec la structure de variété. Autrement dit, on sera souvent amené à parler de coordonnées sans préciser le domaine de la carte correspondante.

On remarque que, par définition, l'ensemble des cartes compatibles avec une structure de variété forme un atlas appelé *atlas maximal*.

29.1.1 Premiers exemples

EXEMPLE :

1. Un ouvert d'un espace affine est muni d'une structure de variété. plus généralement tout ouvert d'une variété a une structure de variété.

2. Sur $\mathbb{R}$ considérons les deux atlas à une carte ($U = \mathbb{R}, \phi : x \mapsto x$) et ($W = \mathbb{R}, \psi : x \mapsto x^3$). Ces deux atlas ne sont pas compatibles.

En effet, $x \mapsto x^3$ n'est pas un difféomorphisme. Il y a donc plein de structures différentielles différentes sur $\mathbb{R}$. On verra cependant qu'elles sont toutes équivalentes.

3. Sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ considérons l'atlas à deux cartes $U_1 =]0, 1[\bmod 1$, $\phi_1(x \bmod 1) = x$ et $U_2 =]-1/2, 1/2[\bmod 1$, $\phi_2(x \bmod 1) = x$. Cela définit une structure différentielle sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

En effet, $U_1 \cap U_2 =]0, 1/2[\cup]1/2, 1[\bmod 1$, $\phi_1(U_1 \cap U_2) =]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$, $\phi_2(U_1 \cap U_2) =]0, 1/2[$ et pour $y \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$, deux cas,

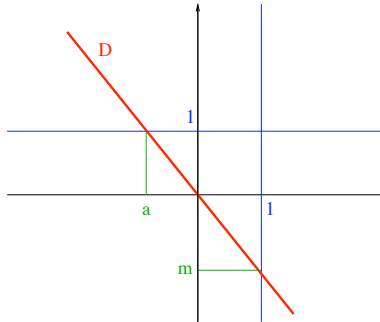
- si $y \in]0, 1/2[$, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y) = y$;
- si $y \in]1/2, 1[$, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y) = y - 1$.

Dans les deux moitiés, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est un C^∞ -difféomorphisme.

4. Une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est muni d'une structure de variété.

29.1.2 Structure différentielle sur la droite projective

Une droite vectorielle D non verticale de $\mathbb{R}^2$ est représentée par une pente $m = \phi_1(D)$, c'est le réel tel que $(1, m) \in D$. Si D n'est pas horizontale, elle possède une antipente $a = \phi_2(D)$, c'est le réel a tel que $(a, 1) \in D$. Les deux applications pente et antipente constituent des cartes, et le changement de carte $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : m \mapsto a = 1/m$ est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cet atlas définit une structure différentielle sur la droite projective.



29.1.3 Structure différentielle sur l'espace projectif

Définition 29.1.3. On appelle ouvert affine U_i de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'ensemble des points dont la i -ème coordonnée homogène est non nulle. On appelle carte affine l'application réciproque de l'homéomorphisme $\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$.

Alors $\phi_i(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{j'} \neq 0\}$, où $j' = j$ si $j < i$, $j' = j - 1$ si $j > i$. Comme

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_{j'}}, \dots, \frac{1}{x_{j'}}, \dots, 1, \dots, \frac{x_1}{x_{j'}} \right)$$

est un C^∞ -difféomorphisme, on obtient ainsi une structure différentielle sur $\mathbb{I}^n(\mathbb{R})$.

Définition 29.1.4. De la même façon, on définit une structure différentielle de dimension $2n$ sur $\mathbb{I}^n(\mathbb{R})$.

29.2 Objets différentiables

29.2.1 Fonctions différentiables

Définition 29.2.1. (i) Soit f une fonction définie sur un ouvert V d'un espace topologique M . On dit que f est C^r par rapport à la carte (U, X) si $f \circ X^{-1}$ est de classe C^r .

(ii) Soit f une fonction définie sur un espace topologique M . On dit que f est C^r par rapport à un atlas, si f est de classe C^r dans toutes les cartes de l'atlas.

(iii) Soit f une fonction sur une variété, alors elle est de classe C^r , si elle est de classe C^r pour l'un des atlas définissant la structure différentielle.

Autrement dit une fonction f est de classe C^r au voisinage d'un point, s'il existe des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ telles que $f = F(x_1, \dots, x_n)$ avec F de classe C^r .

On a alors les propriétés immédiates suivantes qui utilise le fait que si une fonction est de classe C^r sur un ouvert d'un espace affine, alors $f \circ \phi$ est de classe C^r pour tout difféomorphisme ϕ .

Proposition 29.2.2. Pour qu'une fonction soit de classe C^r au voisinage d'un point, il suffit de trouver une carte compatible avec la structure de variété telle que f est de classe C^r pour cette carte. En particulier, les coordonnées d'une carte sont des fonctions de classe C^∞ .

En particulier pour qu'une fonction F définit au voisinage de m soit C^r au voisinage de m , il suffit de trouver des coordonnées $X = (x_1, \dots, x_p)$ définies au voisinage de m , telle que la fonction f vérifiant $F = f(x_1, \dots, x_n)$ soit de classe C^r .

Par exemple, la restriction de toute fonction C^∞ à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est à nouveau une fonction C^∞ .

29.2.2 Applications différentiables

Les fonctions de classe C^∞ vont nous permettre la notion d'application différentiable. Alternativement, nous verrons que tout peut se définir en fonction de cartes.

Définition 29.2.3. Une application continue $\phi : M \rightarrow N$ entre variétés est de classe C^r si pour toute fonction ϕ de classe C^r au voisinage de $f(x)$, $\phi \circ f$ est de classe C^r au voisinage de x .

Nous venons de voir que l'injection d'une sous-variété dans $\mathbb{R}^n$ est une application C^∞ . Nous déduisons immédiatement de cette définition que la composée d'applications de classe C^r est de classe C^r .

Alternativement, la caractérisation suivante est plus efficace.

Proposition 29.2.4. *Une application ϕ entre deux variétés est de classe C^r au voisinage de m , s'il existe des coordonnées X au voisinage de m , des coordonnées Y au voisinage de $f(m)$, telles que $X \circ \phi \circ Y^{-1}$ est de classe C^r .*

Par exemple, les coordonnées sont des exemples d'applications C^∞ .

29.2.3 Difféomorphismes, immersions et submersions

Définition 29.2.5. (i) *Une application $f : M \rightarrow N$ entre variétés est un difféomorphisme de classe C^r si c'est une bijection de classe C^r dont l'inverse est aussi de classe C^r si elle est de classe C^r .*

(ii) *Une application $f : M \rightarrow N$ entre variétés est un difféomorphisme au voisinage de m , s'il existe un ouvert U contenant m telle que f soit un difféomorphisme de U sur $f(U)$.*

(iii) *Une application $f : M \rightarrow N$ est une immersion au voisinage de m , si il existe des coordonnées X au voisinage de m et Y au voisinage de $f(m)$ tel que $Y \circ f \circ X^{-1}$ est une immersion au voisinage de $X(m)$.*

(iv) *Une application $f : M \rightarrow N$ est une submersion au voisinage de m , si il existe des coordonnées X au voisinage de m et Y au voisinage de $f(m)$ tel que $Y \circ f \circ X^{-1}$ est une submersion au voisinage de $X(m)$.*

Comme premier exemple, remarquons que les coordonnées sont des difféomorphismes locaux. **Terminologie.** Dans la suite, *différentiable* signifie de classe C^r , où r est déterminé par le contexte.

Nous avons alors

Proposition 29.2.6. *Si f est une immersion – respectivement submersion – au voisinage de m , alors pour toutes coordonnées X au voisinage de m et Y au voisinage de $f(m)$, $Y \circ f \circ X^{-1}$ est une immersion – respectivement submersion – au voisinage de $X(m)$.*

En particulier, si f est une immersion – respectivement submersion, difféomorphisme – il existe des cartes coordonnées X au voisinage de m et Y au voisinage de $f(m)$, telles que $Y \circ f \circ X^{-1}$ est une application linéaire injective – respectivement surjective, bijective.

Retour sur le cas des espaces projectifs

A titre d'exemple, nous allons interpréter les applications dont le but où la source sont des espaces projectifs.

Lemme 29.2.7. (i) *Soit M une variété de classe C^r . Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ une application de classe C^r . Alors l'application induite $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est de classe C^r .*

(ii) *Soit Y une variété de classe C^r . Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow Y$ une application de classe C^r telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et tout $\lambda \neq 0$, $f(\lambda v) = f(v)$. Alors l'application induite $\tilde{f} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow Y$ est de classe C^r .*

DÉMONSTRATION : 1. Écrivons $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$. Soit $x_0 \in X$, $w = f(x_0)$. Pour simplifier les

notations, supposons que $w_{n+1} = f_{n+1}(x_0) \neq 0$. Alors, au voisinage de $\mathbb{P}(w)$, on peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} , et

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} \circ \tilde{f}(x) &= \phi_{n+1}[f_1(x) : f_2(x) : \dots : f_{n+1}(x)] \\ &= \left(\frac{f_1(x)}{f_{n+1}(x)}, \dots, \frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} \right).\end{aligned}$$

C'est bien une application de classe C^r d'un ouvert de X dans $\mathbb{R}^n$, donc $\tilde{f}$ est de classe C^r .

2. Soit $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v \neq 0$. Pour simplifier les notations, supposons que $v_{n+1} \neq 0$. Alors, au voisinage de $\mathbb{P}(v)$, on peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} , et

$$\begin{aligned}\tilde{f} \circ \phi_1^{-1}(x_1, \dots, x_n) &= \tilde{f}[1 : x_1 : \dots : x_n] \\ &= f(1, x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

C'est bien une application de classe C^r d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans Y , donc $\tilde{f}$ est de classe C^r . $\square$

EXEMPLE : Une application projective est de classe C^∞ là où elle est définie.

En effet, on applique successivement les énoncés 1 et 2 du lemme.

29.2.4 Sous-variétés

Définition 29.2.8. Un sous-ensemble N d'une variété M est une sous-variété si au voisinage de tout point x de N il existe une carte (U, X) telle que $X(U \cap N)$ soit une sous-variété.

Alternativement, un sous-ensemble N d'une variété M est une sous-variété si au voisinage de tout point x de N il existe une carte (U, X) telle que $X(U \cap N)$ soit un ouvert d'un sous-espace affine.

EXEMPLE : Une sous-variété linéaire de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) est une sous-variété.

En effet, dans toute carte affine, une sous-variété linéaire est envoyée sur un sous-espace affine.

Cas des quadriques projectives

Proposition 29.2.9. Soit q une forme quadratique non dégénérée en $n + 1$ variables, de matrice S . Soit Q la quadrique projective de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ définie par q . Alors Q est une sous-variété de classe C^∞ . Soit $p \in Q$. Alors l'hyperplan polaire de p est tangent à Q en p . Cet énoncé reste vrai sans changement si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION : On peut supposer que la dernière coordonnée homogène de p est non nulle. On utilise la carte affine $\phi_{n+1} : U_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors $\phi_{n+1}(U_{n+1} \cap Q) = Q$ est la quadrique affine d'équation $q(x_1, \dots, x_n, 1) = 0$, qui est une sous-variété. Cela prouve que Q est une sous-variété. $\phi_{n+1}(U_{n+1} \cap \mathbb{P}(p^\perp))$ est un hyperplan affine, parallèle à l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, i.e. à l'hyperplan tangent à Q en $\phi_{n+1}(p)$. On conclut que H est tangent à Q en p . $\square$

EXERCICE : A quelle condition l'intersection de deux quadriques projectives non dégénérées est-elle une sous-variété de l'espace projectif ?

29.2.5 Revêtements et structures différentielles

Proposition 29.2.10. *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Étant donnée une structure différentielle sur X , il existe une unique structure différentielle sur E qui rend p différentiable. Inversement, si E est une variété et si pour toute section locale s de p , $s \circ p$ est un difféomorphisme, alors il existe une unique structure différentielle sur X qui rend p différentiable*

DÉMONSTRATION : Si X est une variété, on recouvre X par des ouverts U_i qui sont à la fois contenus dans des ouverts de cartes $\phi_i|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ et trivialisant pour le revêtement, i.e. $p^{-1}(U_i) = \sqcup_j s_j(U_i)$. Les cartes $\phi \circ p|_{s_j(U_i)} : s_j(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ forment un atlas pour E .

Inversement, supposons que E est une variété. On recouvre E par des ouverts U_i qui sont à la fois contenus dans des ouverts de cartes $\phi_i|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ et tels que $p(U_i)$ soit trivialisant, i.e. $p^{-1}(p(U_i)) = \sqcup_j s_j(p(U_i))$. Les cartes $\phi_i \circ s_j : s_j(p(U_i)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ forment un atlas pour X . En effet, deux choix j et j' différents donnent un changement de carte $\phi_i \circ s_{j'} \circ (\phi_i \circ s_j)^{-1} = \phi_i \circ s_{j'} \circ p \circ (\phi_i)^{-1}$ qui est un difféomorphisme. $\square$

EXEMPLE : Soit G un groupe discret qui agit librement et proprement par difféomorphismes d'une variété E . Alors l'espace quotient $X = G \div E$ hérite d'une structure différentielle qui rend le revêtement $p : E \rightarrow X$ différentiable.

En effet, si s est une section locale de p , $s \circ p$ est la restriction à un ouvert d'un élément de G , donc $s \circ p$ est un difféomorphisme.

Chapter 30

Partitions de l'unité

30.0.1 Motivation

Comment fabriquer des objets différentiables, ne serait-ce qu'une fonction non constante, sur une variété ? En combinant des morceaux donnés dans des cartes.

30.0.2 Construction

Définition 30.0.1. Soit X un espace topologique. Soit u une fonction continue sur X . Le support de u est le plus petit fermé en dehors duquel u est nulle.

Rappel 30.0.2. Il existe une fonction paire χ sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ , à support dans $] -1, 1[$, qui vaut 1 sur un voisinage de 0.

Le lemme suivant utilise de manière cruciale qu'une variété est séparée

Lemme 30.0.3. Soit X une variété de classe C^r , soit K un compact de X , soit U un ouvert contenant K . Il existe un voisinage ouvert V de K et une fonction χ de classe C^r sur X , à support dans U , qui vaut 1 sur V .

DÉMONSTRATION : On traite d'abord le cas où $K = \{x\}$. La structure différentielle fournit au voisinage de x une carte $\phi : W \rightarrow V$ avec $W \subset U$, telle que $\phi(x) = 0$. On peut toujours supposer que V contient une boule de rayon 1. Pour $y \in W$, on pose $\chi_x(y) = \chi(\phi(y))$, où χ est la fonction modèle sur $\mathbb{R}$, à support dans $] -1, 1[$. Alors le support de χ_x est un fermé inclus dans $\phi^{-1}(B(\phi(x), 1))$ de U , en particulier ce support est compact. Comme X est séparé, c'est un fermé de X . Tout point $z \notin U$ possède un voisinage disjoint de K . On peut donc prolonger χ_x par 0 en dehors de U , elle reste de classe C^r .

Passons au cas général, on choisit pour tout x de K une fonction χ_x qui vaut 1 sur un voisinage V_x relativement compact de x inclus dans U et à support dans U . On extrait du recouvrement $\{V_x\}_{x \in K}$ un recouvrement fini indexé par une partie finie F de K . On pose alors

$$\rho = \sum_{x \in F} \chi_x.$$

Par construction, on a $\rho = 0$ sur U et $\rho \geq 1$ sur K . On pose enfin

$$\chi = \zeta \circ \rho,$$

où ξ est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$, qui vaut 0 pour $x \geq 0$ et 1 pour $x \geq 1$. $\square$

Définition 30.0.4. Soit X un espace topologique. Soit W_α des ouverts qui recouvrent X . On appelle partition de l'unité subordonnée à (W_α) la donnée, pour chaque α , d'une fonction positive ou nulle χ_α sur X , à support compact dans W_α , de sorte que

(i) Pour tout $x \in X$, seuls un nombre fini parmi les nombres $\chi_\alpha(x)$ sont non nuls.

(ii) $\sum_\alpha \chi_\alpha \equiv 1$.

On rappelle qu'un recouvrement localement fini de l'espace X est un recouvrement par des ouverts $\{U_i\}_{i \in I}$ tels pour tout x de X il existe un voisinage V de x tel que

$$\#\{i \in I \mid V \cap U_i \neq \emptyset\} < \infty.$$

Le recouvrement $\{V_i\}_{i \in I}$ est un sous-recouvrement de $\{W_j\}_{j \in J}$, si pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel que $V_i \subset W_j$.

On peut extraire de tout recouvrement d'un espace localement compact et réunion dénombrable de compacts un sous-recouvrement localement fini.

Théorème 68. Soit X une variété de classe C^r . Soit $\{W_\alpha\}$ un recouvrement localement fini de X par des ouverts d'adhérence compacte. Alors X possède une partition de l'unité de classe C^r subordonnée à $\{W_\alpha\}$.

DÉMONSTRATION : Le recouvrement W_α étant localement fini, il est dénombrable. On construit par récurrence un recouvrement par des ouverts U_i tels que $\bar{U}_i \subset W_i$: supposons que nous ayons construit par récurrence $U_1, \dots, U_n$ tels que $\{U_1, \dots, U_n, W_{n+1}, \dots\}$ recouvre X , on choisit alors U_{n+1} inclus dans W_{n+1} qui contient le compact K_{n+1} défini par

$$K_{n+1} := X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{j=n} U_j \cup \bigcup_{j \geq n+2} W_j \right).$$

Pour construire U_{n+1} , on pose

$$U_{n+1} = \xi^{-1} \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

où ξ est une fonction qui vaut 1 au voisinage de K_{n+1} et à support dans W_{n+1} . En utilisant le fait que W_α est localement fini on montre enfin que $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est un revêtement.

On construit une fonction χ_i qui vaut 1 sur U_i et à support fermé (et donc compact dans W_i).

La fonction $\eta = \sum_i \chi_i$ est bien définie et C^∞ car elle est égale à une somme finie de χ_i sur un voisinage d'un point quelconque : en effet, soit O un voisinage de x tel que

$$\#\{j \mid O \cap W_j \neq \emptyset\} < \infty.$$

Par construction,

$$\eta|_O = \sum_{i|O \cap W_i \neq \emptyset} \chi_i,$$

et donc η est finie et C^∞ .

On peut poser puisque η est strictement positive

$$\psi_i = \frac{\chi_i}{\eta}.$$

Par construction, c'est une fonction de classe C^r à support dans W_i et $\sum_i \psi_i \equiv 1$. $\square$

30.0.3 Plongement

Théorème 69. [H. WHITNEY (1936)]. *Toute variété compacte est difféomorphe à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.*

DÉMONSTRATION : Soit X une variété compacte de dimension n . Soit $(U_i, \phi_i)_{i=1, \dots, N}$ un atlas fini pour la structure différentielle de X . On construit comme dans la proposition précédente un recouvrement par des ouverts V_i d'adhérences contenues dans U_i . On considère ensuite une fonction ψ_i à support dans U_i et égale à 1 sur V_i .

On définit une application différentiable $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{nN+N}$ par

$$df(x) = (\psi_1(x)\phi_1(x), \dots, \psi_n(x)\phi_n(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x)).$$

L'application f est bien définie, car lorsque $x \notin U_i$, $\psi_i(x) = 0$ donc on n'a pas besoin de connaître $\phi_i(x)$.

Alors f est une immersion. En effet, au voisinage de x , l'une des fonctions ψ_i vaut 1, donc la différentielle en x de la i -ème composante $\psi_i\phi_i$ est de rang n . *A fortiori*, $d_x f$ est de rang n .

Enfin f est injective. En effet, si $f(x) = f(y)$, il existe z telle que $\psi_i(x) = \psi_i(y) > 0$. Donc x et y appartiennent à U_i . Comme $\phi_i(x).\psi_i(x) = \phi_i(y).\psi_i(y)$, on a $\phi_i(x) = \phi_i(y)$. Comme ϕ_i est injective, on conclut que $x = y$.

L'application f est un homéomorphisme sur son image, par compacité.

Dès lors, $f(X)$ est une sous-variété. En effet, pour tout $w \in f(X)$, $w = f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U)$ soit une sous-variété. Comme $f(U)$ est un voisinage de w dans $f(X)$, cela prouve que $f(X)$ est une sous-variété.

Enfin f est un difféomorphisme, car f est un difféomorphisme local bijectif. $\square$

REMARQUES : Le théorème de H. Whitney contient davantage d'information.

1. Il s'applique aussi à des variétés non compactes (voir ci-dessous).
2. Il donne une meilleure borne sur la dimension de l'espace d'arrivée : Whitney plonge une variété de dimension n dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.
3. Whitney montre que pour certaines valeurs de n , cette borne ne peut pas être améliorée.
4. Le théorème de immersions de Ralph Cohen montre que toute variété de dimension n peut-être immergée dans $\mathbb{R}^{2n-a(n)}$ où $a(n)$ est le nombre de 1 dans la décomposition dyadique de n . C'est un théorème difficile ! (et vraisemblablement inutile)

30.0.4 Cas de l'espace projectif

Dans le cas de l'espace projectif, il y a des plongements explicites.

EXERCICE : Soit $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \text{End}(V)$ l'application qui à une droite p associe le projecteur orthogonal sur p . Vérifier que f est un difféomorphisme sur son image.

Solution. Soit p une droite, soit w un vecteur directeur de p . Le projecteur orthogonal sur p est donné par la formule

$$f(p)(u) = \frac{w^\perp u}{w^\perp w} w = \frac{1}{w^\perp w} w w^\perp u,$$

donc sa matrice est $\frac{1}{w^\perp w} w w^\perp$. C'est une fonction de classe C^∞ de w , donc f est de classe C^∞ .

L'image de f est l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs orthogonaux de rang un. L'application réciproque associe à un projecteur son image. Cela montre que f est un homéomorphisme de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{P}$.

Soit $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Choisissons des coordonnées homogènes de sorte que $p = [0 : \cdots : 0 : 1]$. On peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} au voisinage de p . Dans cette carte,

$$g = f \circ \phi_{n+1}^{-1}(x) = \frac{1}{1 + |x|^2} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^\perp & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + |x|^2} \begin{pmatrix} x x^\perp & x^\perp \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

La différentielle de g en $x = 0$ est

$$v \mapsto \begin{pmatrix} v x^\perp + x v^\perp & v^\perp \\ v & 0 \end{pmatrix},$$

qui est injective, puisque le troisième bloc l'est. Cela prouve que f est une immersion en p . Comme on l'a vu lors de la démonstration du théorème de Whitney, une immersion qui est un homéomorphisme sur son image est un difféomorphisme sur une sous-variété. $\square$

Chapter 31

Les espaces cotangent et tangent

31.1 L'espace cotangent et la différentielle d'une fonction

Nous commençons par définir ce qu'est une fonction de différentielle nulle

Définition 31.1.1. Soit f une fonction de classe C^1 définie au voisinage d'un point m d'une variété. Nous dirons que f est de différentielle nulle en m si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes

- (i) Il existe des coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)$ tel que $f = F(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de m avec $d_{X(m)}F = 0$.
- (ii) Pour toutes coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)$ si F est définie par $f = F(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de m alors $d_{X(m)}F = 0$.

L'équivalence entre les deux propriétés est facile.

REMARQUES : Nous laissons en exercice le soin de montrer qu'une fonction f sur un espace affine est de différentielle nulle en m si et seulement si il existe

- un entier k ,
- des fonctions h_i s'annulant en m , dérivable en m et définies au voisinage de m , et des fonctions ϵ_i pour $i \in \{1, \dots, k\}$ également définies au voisinage de m

telle que au voisinage de m on ait

$$f = \sum_{i=1}^{i=k} \epsilon_i h_i^2.$$

Nous pouvons donc alternativement définir une fonction comme étant de différentielle nulle en un point d'une variété par la même condition. Ceci nous évite de parler de coordonnées.

Nous avons alors la proposition immédiate

Proposition 31.1.2. *L'espace $\mathcal{E}(m, U)$ des fonctions définies sur un voisinage U de m , nulle en m et de différentielle nulle est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{G}(m, U)$ des fonctions de classe C^1 s'annulant en m et définie sur U de m . De plus, si V est un voisinage de m inclus dans U , alors la restriction donne un isomorphisme de $\mathcal{G}(m, U)/\mathcal{E}(m, U)$ avec $\mathcal{G}(m, V)/\mathcal{E}(m, V)$.*

DÉMONSTRATION : le point délicat est la surjectivité de la restriction : elle s'obtient en utilisant une fonction cloche constante au voisinage de m et de support dans V . $\square$

Ceci nous permet de proposer la définition suivante

Définition 31.1.3. [ESPACE COTANGENT ET DIFFÉRENTIELLE] *Avec les notations de la proposition précédente, l'espace cotangent de la variété M en m , noté T_m^*M est l'espace vectoriel $\mathcal{G}(m, U)/\mathcal{F}(m, U)$. La différentielle d'une fonction f de classe C^1 définie au voisinage de m – notée $d_m f$ – est alors la classe de $f - f(m)$.*

On remarque en particulier que la différentielle d'une constante est nulle et que $d(fg) = f dg + g df$.

Le théorème suivant permet de comprendre ce qu'est l'espace cotangent et la différentielle d'une fonction.

Théorème 70. *Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage d'un point m . Alors*

$$(d_m x_1, \dots, d_m x_n)$$

*est une base de T_m^*M . En particulier $\dim T_m^*M = \dim M$. De plus si $f = F(x_1, \dots, x_n)$, alors*

$$d_m f = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{X(m)} d_m(x_i).$$

Définition 31.1.4. [DÉRIVÉES PARTIELLES] *Les dérivées partielles de la fonction f en m par rapport au coordonnées x_i sont les composantes de df dans la base dx_i . Elles sont notées $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_m$ de telle sorte que l'on a*

$$d_m f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_m d_m(x_i).$$

D'après la proposition précédente, si $f = F(x_1, \dots, x_n)$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

Corollaire 31.1.5. *Si une fonction f a un maximum ou un minimum local en m alors $d_m f = 0$.*

31.2 L'espace tangent et les courbes

Définition 31.2.1. *L'espace tangent de la variété M en m , noté $T_m M$ est l'espace vectoriel dual de l'espace cotangent. Ces éléments sont les vecteurs tangent. On note $df_m(u)$ la valeur du vecteur tangent u appliqué à la différentielle $d_m f$.*

31.2.1 Exemples de vecteurs tangents

Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage d'un point m . On note alors $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ la base duale de $(d_m x_1, \dots, d_m x_n)$, de telle sorte que

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Définition 31.2.2. [VECTEUR TANGENT À UNE COURBE] Soit c une courbe C^1 à valeurs dans M telle que $c(t_0) = m$. Le vecteur tangent à la courbe c en t_0 , noté $\dot{c}(t_0)$, est le vecteur défini par

$$df_m(\dot{c}(t_0)) = \left. \frac{df \circ c}{dt} \right|_{t_0}.$$

Nous avons alors

Théorème 71. [VECTEURS TANGENTS ET COORDONNÉES LOCALES] Tous les vecteurs sont des vecteurs tangents à une courbe. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage de m . Soit c une courbe telle que $c(t_0) = m$. Si on pose $c_i = x_i(c)$ alors

$$\dot{c}(t_0) = \sum_i \dot{c}_i(t_0) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Si f est une fonction, alors

$$df(\dot{c}(t_0)) = \sum_i \dot{c}_i(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

31.2.2 Espace tangent à une sous-variété

Si N est une sous-variété de M , on identifiera l'espace tangent à N en m à un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à M . Plus précisément, l'espace tangent à N est identifié à l'ensemble des vecteurs tangents aux courbes tracées sur N .

31.3 Application tangente et cotangente

Soit ϕ une application de classe C^1 définie au voisinage d'un point m d'une variété M à valeurs dans une variété N .

Définition 31.3.1. Il existe une unique application linéaire, appelée application tangente à ϕ et notée $T_m \phi$ définie de $T_m M$ à valeurs dans $T_{\phi(m)} N$, vérifiant

$$d_{\phi(m)} f \circ T_m \phi = d_m (f \circ \phi).$$

De même, il existe une unique application linéaire, appelée application cotangente à ϕ et notée $T_m^* \phi$ définie de $T_{\phi(m)}^* N$ à valeurs dans $T_m^* M$, vérifiant

$$T_m^* \phi(d_{\phi(m)} \phi) = d_m (f \circ \phi).$$

L'application cotangent est la transposée de la tangente.

La proposition suivante résume aussi les propriétés importantes de l'application tangente.

Proposition 31.3.2. *Soit ϕ et ψ des applications différentiables.*

- (i) *Nous avons $T_m(\phi \circ \psi) = T_{\psi(m)}\phi \circ T_m\psi$.*
- (ii) *Si c est une courbe, alors $T_{c(t_0)}\phi(\dot{c}(t_0)) = (\phi \circ c)'(t_0)$.*
- (iii) *Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage de m . Soit $Y = (y_1, \dots, y_p)$ sont des coordonnées au voisinage de $\phi(m)$. Posons $\phi_j = y_j(\phi)$. Alors les coefficients de la matrice de $T_m\phi$ dans les bases associées aux coordonnées sont $\frac{\partial(\phi_j)}{\partial x_i}$.*

Enfin l'analogie des théorèmes d'inversion locale et des submersions immersions se reproduit dans le cadre des variétés.

Théorème 72. *Soit ϕ une application différentiable.*

- (i) *On suppose que l'application tangente à ϕ en m est inversible, alors ϕ est un difféomorphisme au voisinage de m*
- (ii) *Une application ϕ est une submersion en m si et seulement si $T_m\phi$ est surjective.*
- (iii) *Une application ϕ est une immersion en m si et seulement si $T_m\phi$ est injective.*

Chapter 32

Formes différentielles

32.1 Formes différentielles de degré 1

32.2 Définitions et premières propriétés

Définition 32.2.1. [FORME DIFFÉRENTIELLE DE DEGRÉ 1] Une 1-forme différentielle ou forme différentielle de degré 1 sur une variété M est une application $\omega : m \rightarrow \omega_m$ définie de M dans T^*M telle que pour tout m de M on a $\omega_m \in T_m^*M$.

REMARQUES :

1. La différentielle d'une fonction f définie par

$$df : x \rightarrow d_x f,$$

est une 1-forme différentielle.

2. Si α et β sont deux 1-formes différentielles. La somme $\alpha + \beta$ définie par

$$\alpha + \beta : m \rightarrow \alpha_m + \beta_m$$

est une 1-forme différentielle.

3. Si f est une fonction et ω est une 1-forme différentielle le produit

$$f \cdot \omega : m \rightarrow f(m)\omega_m,$$

est également une 1-forme différentielle.

4. Si ω est une forme différentielle et $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage U d'un point m . Il existe des fonctions uniques ω_i définies sur U telles que

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot dx_i.$$

Cette dernière remarque nous permet de donner un sens à la notion de 1-forme différentiable.

Définition 32.2.2. [FORME DIFFÉRENTIELLE LISSE] Nous dirons qu'une 1-forme différentielle ω est de classe C^k au voisinage du point m , s'il existe des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ telles qu'au voisinage de m nous ayons

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i, \quad (32.1)$$

pour des fonctions f_i de classe C^k au voisinage de m . Nous dirons qu'une 1-forme différentielle est de classe C^k si elle est de classe C^k au voisinage de tout les points de la variété M .

Comme précédemment nous remarquons

REMARQUES :

1. La somme de deux 1-formes différentielles de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage d'un point.
2. Le produit d'une fonction et d'une forme de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage de ce point.
3. Si ω est de classe C^k au voisinage de m alors pour toutes coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage d'un point, nous avons

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i, \quad (32.2)$$

pour des fonctions f_i de classe C^k au voisinage de ce point.

Définition 32.2.3. Nous notons $\Omega^1(M)$ l'espace des formes différentielles de classe C^∞ sur M . L'espace $\Omega^1(M)$ est un espace vectoriel. La multiplication par les fonctions C^∞ lui donne la structure d'un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞ sur M .

Les différentielles de fonctions jouent un rôle particulier et nous dirons

Définition 32.2.4. [FORMES EXACTES] Nous dirons qu'une 1-forme différentielle est exacte si elle est la différentielle d'une fonction.

32.2.1 Intégration des formes différentielles

Définition 32.2.5. [INTÉGRATION SUR UN CHEMIN] Soit $c : [a, b] \rightarrow M$ un chemin de classe C^1 par morceaux sur M et ω une 1-forme différentielle définie sur M . L'intégrale de ω sur c est le nombre réel

$$\int_c \omega := \int_a^b \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt.$$

Nous vérifions que si f est une fonction alors

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

En particulier, si c est un *lacet*, c'est-à-dire si $c(a) = c(b)$, alors pour toute forme exacte ω nous avons

$$\int_c \omega = 0.$$

EXERCICE :

1. si ϕ est un difféomorphisme croissant de $[a, b]$ on a

$$\int_c \omega = \int_{c \circ \phi} \omega.$$

2. Soit $\omega = xdy$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Montrez en utilisant des carrés que ω n'est pas exacte.
3. Soit $d\theta = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calculer l'intégrale de $d\theta$ sur le chemin $c : [0, \theta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$s \rightarrow (\cos(s), \sin(s)).$$

Montrez que $d\theta$ n'est pas exacte. La notation " $d\theta$ " est standard mais est un abus de langage : il n'existe pas de fonction θ bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont $d\theta$ serait la différentielle.

32.2.2 Formes exactes et différentielle des formes

Quand une forme différentielle est-elle exacte ? Dans des coordonnées une condition nécessaire est donnée par le lemme de Schwarz : si ω est une 1-forme différentielle exacte, alors pour tout système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ nous avons

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i},$$

où les fonctions ω_i sont définies par

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i.$$

Autrement dit une condition nécessaire d'exactitude s'obtient en différenciant les composantes de ω .

A ce stade, nous pouvons faire un certain nombre de remarque qui justifient les constructions que nous allons faire par la suite

REMARQUES :

1. Un bref calcul montre que cette condition nécessaire est indépendante du choix des coordonnées. Ceci suggère fortement qu'il doit y avoir une manière élégante – c'est-à-dire sans choix de coordonnées – d'énoncer cette condition nécessaire.
2. Cette condition nécessaire est suffisante pour $M = \mathbb{R}^2$: si ω est une 1-forme sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \frac{\partial \omega_y}{\partial x}$, alors la fonction f définie par

$$f(x, y) = \int_0^x \omega_x(t, 0) dt + \int_0^y \omega_y(x, s) ds,$$

vérifie $df = \omega$.

3. Cette condition n'est pas suffisante sur $\mathbb{R}^2$ privé d'un point : la forme $d\theta$ définie dans l'exercice précédent vérifie cette condition nécessaire. Pourtant elle n'est pas exacte. Nous verrons que la présence du "trou" est responsable de cette situation.

Chapter 33

Formes différentielles et différentielle extérieure

33.1 Rappels d'algèbre linéaire

33.1.1 Formes multilinéaires alternées

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Une forme *multilinéaire alternée* de degré p – ou *p-forme extérieure* – est une application multilinéaire $\omega : E^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ on ait

$$\omega(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma)\omega(u_1, \dots, u_p).$$

L'ensemble des formes extérieures de degré p est un espace vectoriel que l'on note $\bigwedge^p(E^*)$. Cet espace est de dimension $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. Notons en effet $\mathcal{I}(p)$ l'ensemble des *multi-indices ordonnés d'ordre p* , c'est-à-dire de p -uplets $I = (i_1, \dots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$. Alors, si $(e^1, \dots, e^n)$ est une base de E , une base de $\bigwedge^p(E^*)$ est donnée par les formes e_I pour I dans $\mathcal{I}(p)$ définies par

$$e_I(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = 1,$$

et

$$e_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0,$$

si $\{i_1, \dots, i_p\} \neq \{j_1, \dots, j_p\}$.

On remarque en particulier que $\dim \bigwedge^p(E^*) = 0$ si $p > n$ et que $\dim \bigwedge^p(E^*) = \dim \bigwedge^{n-p}(E^*)$

33.1.2 Produit intérieur

Définition 33.1.1. Si v est un vecteur de E et ω une p -forme extérieure, le produit intérieur de ω par v noté $\iota_v \omega$ est la $(p-1)$ -forme définie par

$$\iota_v \omega(u_1, \dots, u_{p-1}) = \omega(v, u_1, \dots, u_{p-1}).$$

Pour calculer le produit intérieur efficacement, il suffit de remarquer que si $I = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(e^1, \dots, e^n)$ la base duale, alors

$$\iota_{e^1} e_I = e_{I \setminus \{1\}}.$$

33.1.3 Produit extérieur

Nous définissons le produit extérieur de deux formes de degré 1 α et β comme la 2-forme $\alpha \wedge \beta$ définie par

$$\alpha \wedge \beta(u, v) = \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u).$$

Nous admettons que ce produit extérieur s'étend de manière unique en une application bilinéaire $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ de $\wedge^p(E^*) \times \wedge^k(E^*)$ dans $\wedge^{p+k}(E^*)$ qui vérifie les propriétés suivantes

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad (33.1)$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg(\alpha) \cdot \deg(\beta)} \beta \wedge \alpha. \quad (33.2)$$

On a besoin aussi de normaliser et on demande que si $I = (i_1, \dots, i_p)$ alors

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} = e_I.$$

Explicitement le produit extérieur est donné par si $(u_1, \dots, u_p)$ sont p -vecteurs et $p = m + n$ où $m = \deg(\alpha)$ et $n = \deg(\beta)$

$$(\alpha \wedge \beta)(u_1, \dots, u_p) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \alpha(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(m)}) \beta(u_{\sigma(m+1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$$

Vérifier que le produit ainsi défini est associatif demande plus de temps.

33.1.4 Induction

Si A est une application linéaire de E dans F , elle définit une application linéaire dite *induite* et noté A^* de $\wedge^p(F^*)$ dans $\wedge^p(E^*)$ définie par

$$(A^*\omega)(u_1, \dots, u_p) = \omega(A(u_1), \dots, A(u_p)).$$

On vérifie alors que

$$A^*(\alpha \wedge \beta) = A^*\alpha \wedge A^*\beta, \quad (33.3)$$

$$A^* \circ B^* = (B \circ A)^*, \quad (33.4)$$

$$A^*(\iota_{A(u)}(\omega)) = \iota_u(A^*\omega). \quad (33.5)$$

33.2 Formes différentielles

Nous allons procéder pour les p -formes comme pour les 1-formes. Soit $\wedge^p(\mathbb{T}^*M) = \bigsqcup_{m \in M} \wedge^p(\mathbb{T}_m^*M)$.

Définition 33.2.1. Une p -forme différentielle est une application $\omega : m \rightarrow \omega_m$ défini de M à valeurs dans $\wedge^p(\mathbb{T}^*M)$ telle que pour tout m , on a $\omega_m \in \wedge^p(\mathbb{T}_m^*M)$.

REMARQUES :

- si α et β sont deux formes différentielles, on définit leur produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ par

$$\alpha \wedge \beta : m \mapsto \alpha_m \wedge \beta_m.$$

Si elles ont le même degré, on définit leur somme par

$$\alpha + \beta : m \mapsto \alpha_m + \beta_m.$$

- Si $X = (x_1, x_n)$ sont des coordonnées sur un ouvert U , et ω une p -forme, il existe des fonctions uniques ω_I appelées *composantes* définies sur U , où I appartient à l'ensemble $\mathcal{I}$ de multi-indices d'ordre p telles que

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}(p)} \omega_I dx_I.$$

- Par convention, une fonction est une forme de degré 0.

De manière analogue à la situation en degré 1, nous avons

Définition 33.2.2. [FORMES DIFFÉRENTIELLE LISSE] *Nous dirons qu'une p -forme différentielle ω est de classe C^k au voisinage du point m , s'il existe des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ telles qu'au voisinage de m , les composantes de ω sont de classe C^k au voisinage du point m . Nous dirons qu'une 1-forme différentielle est de classe C^k si elle est de classe C^k au voisinage de tout les points de la variété M .*

Comme précédemment nous remarquons

REMARQUES :

1. La somme de deux p -formes différentielles de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage d'un point.
2. Le produit extérieur de deux formes différentielles de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage de ce point.
3. Si ω est de classe C^k au voisinage de m alors pour toutes coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage d'un point, les composantes de ω sont de classe C^k au voisinage de ce point.

Définition 33.2.3. *Nous notons $\Omega^p(M)$ l'espace des p -formes différentielles de classe C^∞ sur M . L'espace $\Omega^p(M)$ est un espace vectoriel. L'espace vectoriel*

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{p=0}^{p=n} \Omega^p(M),$$

est une algèbre pour le produit extérieur.

33.2.1 Un exemple de forme de degré 2

Nous allons donner sous forme de remarque un exemple important de forme de degré 2. Soit ω une 1-forme. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage de m . Notons $d\omega^X$ la forme de degré 2 définies au voisinage de m par

$$d\omega^X = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Un calcul laborieux – que nous ferons plus tard de manière intelligente – montre alors que si Y est une autre système de coordonnées au voisinage de m nous avons

$$d\omega^X = d\omega^Y. \quad (33.6)$$

Nous pouvons alors définir de manière non équivoque la différentielle $d\omega$ de ω comme la 2-forme définie au voisinage de tout point m par

$$d\omega = d\omega^X,$$

pour un système X de coordonnées au voisinage de m . Le lemme de Schwarz se traduit alors par l'équation

$$d(df) = 0.$$

Nous avons mené à bien un de nos projets : trouver une condition nécessaire pour qu'une forme soit exacte.

Bien sûr une nouvelle question se pose : sous quelle condition une 2-forme est-elle de la forme $d\beta$? Dans le prochain paragraphe nous allons généraliser la construction que nous venons de donner.

33.3 Différentielle extérieure

Définition 33.3.1. Nous dirons qu'une application linéaire d définie de $\Omega^*(M)$ dans lui-même, envoyant $\Omega^p(M)$ dans $\Omega^{p+1}(M)$, est une différentielle extérieure si elle étend la différentielle des fonctions et si

- pour toute forme α nulle au voisinage d'un point, $d\alpha$ est nulle au voisinage de ce point
- pour toute forme α de degré $p - 1$, pour toute fonction f nous avons

$$d(f.d\alpha) = df \wedge d\alpha. \quad (33.7)$$

Nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème 73. Il existe une unique différentielle extérieure sur toute variété M

Nous montrons l'unicité puis l'existence de la différentielle extérieure.

33.3.1 Unicité de la différentielle extérieure

Dans cette section, soit d une différentielle extérieure. Nous nous proposons de démontrer les propriétés suivantes

Proposition 33.3.2. (i) Pour toute famille de fonctions $f_1, \dots, f_k$ avec $k \leq p$, on a

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_k = d(f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_k).$$

(ii) Si $x_1, \dots, x_n$ sont des coordonnées définies au voisinage de m et si

$$\omega = \sum_{I \in I(p)} \omega_I dx_I,$$

alors au voisinage de m

$$d\omega = \sum_{I \in I(p)} d\omega_I \wedge dx_I.$$

Le premier point suit d'une récurrence sur k . Le deuxième est une conséquence immédiate du premier.

Comme corollaire immédiat de la dernière propriété, nous obtenons l'unicité puisque la différentielle extérieure est donnée par une formule explicite dans des coordonnées locales:

Corollaire 33.3.3. *Il existe au plus une différentielle extérieure sur une variété M .*

Démontrons la proposition

DÉMONSTRATION : Montrons tout d'abord que si $f_1, \dots, f_k$, avec $k \leq p + 1$, sont des fonctions, alors

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_k = d(f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_k)$$

Montrons ceci par récurrence sur k . Cette propriété est évidemment vrai pour $k = 1$. Par ailleurs, si la propriété est vraie au rang $k - 1$, on a

$$df_2 \wedge \dots \wedge df_k = d\alpha,$$

où

$$\alpha = f_2 df_3 \wedge \dots \wedge df_k.$$

En appliquant (33.7), on a bien

$$d(f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_k) = d(f_1 \wedge d\alpha) = df_1 \wedge d\alpha = df_1 \wedge \dots \wedge df_k.$$

Il ne reste plus qu'à montrer la dernière propriété. Soit donc $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage d'un point m et ω qui s'écrit

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_I, \quad (33.8)$$

au voisinage de m . En multipliant par une fonction plateau on construit des fonctions – également notées x_i et ω_I définies sur M tout entier qui coïncident avec les précédentes au voisinage de m , et qui vérifie l'égalité (33.8) au voisinage de m .

Nous savons alors d'après la première propriété et la linéarité de d que

$$d\left(\sum_{I \in \mathcal{I}(p)} \omega_I dx_I\right) = \sum_{I \in \mathcal{I}(p)} d\omega_I \wedge d(x_{i_1}(dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})) \quad (33.9)$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{I}(p)} d\omega_I \wedge dx_I. \quad (33.10)$$

Enfin, comme $\sum_{I \in \mathcal{I}(p)} \omega_I dx_I$ et ω coïncident au voisinage de m , leur image par d coïncident également au voisinage de m . $\square$

33.3.2 Existence de la différentielle extérieure

Commençons par montrer le résultat suivant

Lemme 33.3.4. *Soit $(U, (x_1, \dots, x_n))$ une carte au voisinage d'un point, alors l'application linéaire d^X définie pour tout k par*

$$d^X\left(\sum_{I \in \mathcal{I}(k)} \omega_I dx_I\right) = \sum_{I \in \mathcal{I}(k)} d\omega_I \wedge dx_I,$$

est une différentielle extérieure sur U

DÉMONSTRATION : Soit

$$\omega = \sum_{I \in I(k)} \omega_I dx_I.$$

Alors

$$d^X(f d\omega) = d^X \left(\sum_{I \in I(k)} f d\omega_I \wedge dx_I \right) \quad (33.11)$$

$$= d^X \left(\sum_{i,I} f \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \right) \quad (33.12)$$

$$= \sum_{i,I} d \left(f \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \right) \wedge dx_i \wedge dx_I \quad (33.13)$$

$$= \sum_{i,I} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} df \wedge dx_i \wedge dx_I + \sum_{i,I} f \left(d \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \right) \wedge dx_i \wedge dx_I \quad (33.14)$$

$$= df \wedge \sum_{i,I} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I + f \sum_{i,j,I} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I \quad (33.15)$$

$$= df \wedge d\omega + \sum_{i < j, I} \left(\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I \quad (33.16)$$

$$= df \wedge d^X \omega. \quad (33.17)$$

Nous avons bien montré que d^X est une différentielle extérieure $\square$

Nous en déduisons alors

Proposition 33.3.5. *Soit (U, X) et (V, Y) des ouverts de cartes. Nous avons $d^X = d^Y$ au voisinage de tout point de $U \cap V$.*

DÉMONSTRATION : Ceci suit de la deuxième partie de la proposition 33.3.2 appliqué à la variété $U \cap V$. $\square$

Nous pouvons construire alors la différentielle extérieure en posant $d\omega = d^X \omega$, au voisinage d'un point m , pour des coordonnées définies au voisinage de m .

33.4 Formes différentielles induites

Définition 33.4.1. *Soit M et N deux variétés et F une application C^∞ de M dans N . Si ω est une p -forme sur N , la forme induite par F est la forme*

$$F^* \omega : m \rightarrow (\mathbb{T}_m F)^* \omega_{F(m)}.$$

En particulier, on a

$$(F^* \omega)_m(u_1, \dots, u_p) = \omega_{F(m)}(\mathbb{T}_m F(u_1), \dots, \mathbb{T}_m F(u_p)).$$

REMARQUES :

1. On remarque que si α est une forme C^∞ qui s'écrit

$$\alpha = f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_p.$$

Alors

$$F^*\alpha = (f_1 \circ F) d(f_2 \circ F) \wedge \dots \wedge d(f_p \circ F),$$

et en particulier $F^*\alpha$ est C^∞ . Comme toute forme C^∞ est combinaison linéaire localement de fonction sous la forme $f_1 df_2 \wedge \dots df_p$, ceci nous garantit que la forme induite d'une forme C^∞ est bien C^∞ .

2. Si F est une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même

$$F^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = J(F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

où $J(F) : x \rightarrow \det(D_x F)$ est le jacobien de F .

33.5 Un premier formulaire

Le théorème suivant réunit les propriétés importantes de la différentielle extérieure

Théorème 74.

$$d(d\alpha) = 0, \quad (33.18)$$

$$d(F^*\alpha) = F^*d\alpha, \quad (33.19)$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta. \quad (33.20)$$

DÉMONSTRATION : Soit α forme de degré k avec $k < p - 2$, soit ψ la fonction qui vaut constamment 1. Alors

$$d(d\alpha) = d(\psi d\alpha) = d\psi \wedge d\alpha = 0.$$

Remarquons que si f est une fonction, $F^*df = d(f \circ F)$.

Ensuite, par linéarité, il suffit de la vérifier la deuxième propriété, pour une forme α qui s'écrit

$$\alpha = f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_p,$$

puisque toute forme localement est sous de forme qui admettent cette écriture. Alors

$$F^*\alpha = (f_1 \circ F) d(f_2 \circ F) \wedge \dots \wedge d(f_p \circ F).$$

En particulier

$$d(F^*\alpha) = df_1 \circ F \wedge df_2 \circ F \wedge \dots \wedge df_p \circ F = F^*(df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_p) = F^*d\alpha.$$

Démontrons la dernière propriété. A nouveau, il suffit de le vérifier par récurrence pour

$$\alpha = f d\alpha_0 \quad \beta = g d\beta_0$$

On a alors puisque par récurrence $d\alpha_0 \wedge d\beta_0$ est exacte:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(fg d\alpha_0 \wedge d\beta_0) \quad (33.21)$$

$$= gdf\alpha_0 \wedge d\beta_0 + fdg\alpha_0 \wedge d\beta_0 \quad (33.22)$$

$$= (df\alpha_0) \wedge (gd\beta_0) + (-1)^{\deg(\alpha)} (fd\alpha_0) \wedge (dg \wedge d\beta_0) \quad (33.23)$$

$$= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta. \quad (33.24)$$

□

33.6 Champ de vecteur et produit intérieur

33.6.1 Champ de vecteurs

Nous commençons par reproduire un schéma connu.

Définition 33.6.1. (i) L'espace tangent à M est

$$TM = \bigsqcup_{m \in M} T_m M.$$

(ii) Un champ de vecteur est une application $\xi : m \mapsto \xi_m$ de M dans TM telle que pour tout m , ξ_m appartienne à $T_m M$.

(iii) Un champ de vecteur ξ est de classe C^∞ sur M au voisinage de m s'il s'écrit

$$\xi = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

pour un système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de m et des fonctions ξ_i de classe C^∞

(iv) L'espace vectoriel de champs de vecteurs de classe C^∞ sur M est noté $\chi^\infty(M)$.

33.6.2 Produit intérieur

Nous pouvons maintenant définir le produit intérieur

Définition 33.6.2. Le produit intérieur de la p -forme ω et du champ de vecteur ξ est la $p-1$ -forme $\iota_\xi \omega$ définie par

$$(\iota_\xi \omega)_m = \iota_{\xi_m} \omega_m.$$

On vérifie en utilisant de coordonnées locales que si ξ et ω sont C^∞ alors $\iota_\xi \omega$ est aussi C^∞ .

33.6.3 Dérivation en un point

Nous allons introduire un nouveau point de vue sur les champs de vecteurs.

Définition 33.6.3. Une dérivation en un point m d'une variété M est une application linéaire ∂ de $C^\infty(M)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

(i) $\partial f = 0$ si f s'annule au voisinage de m ,

(ii) $\partial(fg) = f(m)\partial g + g(m)\partial f$.

Nous avons alors

Proposition 33.6.4. *Un vecteur tangent X en m_0 définit une dérivation ∂_X par $\partial_X := f \rightarrow df_{m_0}(X)$. Réciproquement toute dérivation provient d'un vecteur tangent en m_0 .*

DÉMONSTRATION : Soit ∂ une dérivation en m_0 . Soit $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage de m_0 telles que $x_i(m_0) = 0$. Si f est une fonction C^∞ on peut écrire au voisinage de m_0

$$f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0)x_i + \sum_i h_i x_i,$$

où les fonctions h_i s'annulent en m_0 . Nous en déduisons que

$$\partial f = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0)(\partial x_i).$$

Soit donc X le vecteur tangent en m défini par

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} (\partial x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Alors, pour toute fonction f ,

$$df(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (\partial x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial f.$$

Nous venons de montrer que toute dérivation provient d'un vecteur tangent. $\square$

Chapter 34

Lemme de Poincaré et cohomologie

34.1 Présentation

Définition 34.1.1. Nous dirons qu'une forme différentielle est fermée si sa différentielle extérieure est nulle, et nous dirons qu'elle est exacte si elle est la différentielle d'une forme. Nous dirons enfin que deux formes sont cohomologues si leur différence est exacte.

Toute forme exacte est fermée car $d \circ d = 0$. La réciproque dépend de la forme de l'espace comme nous l'avons vu dans le cas de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

34.1.1 Espace contractile et homotopie

En anticipant sur une définition plus générale, nous dirons qu'une application – ou un objet comme une forme différentielle – est C^∞ sur $[0, 1] \times M$, si il est la restriction d'un objet C^∞ défini sur $[-\epsilon, 1 + \epsilon] \times M$.

Définition 34.1.2. Nous dirons que deux applications F et G de classe C^∞ de M dans N sont homotopes s'il existe une application H – appelée homotopie – de classe C^∞ de $M \times [0, 1]$ dans N telle que $H(m, 0) = F(m)$ et $H(m, 1) = G(m)$.

Définition 34.1.3. Nous dirons qu'une variété M est contractile si l'identité est homotope à une application constante.

REMARQUES :

1. L'espace $\mathbb{R}^n$ est contractile de même que tout ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$. La contraction H est donnée par $H(s, m) = sm$.
2. Nous verrons plus tard qu'une variété compacte n'est jamais contractile.

34.1.2 Lemme de Poincaré et formule d'homotopie

Notre but est de montrer le lemme de Poincaré

Lemme 34.1.4. [POINCARÉ] *Si M est contractile, alors toute forme fermée de degré non nulle est exacte.*

Ce lemme est une conséquence de la

Lemme 34.1.5. [FORMULE D'HOMOTOPIE] *Soit F et G deux applications homotopes de M dans N . Soit ω une forme fermée sur N . Alors $F^*\omega$ et $G^*\omega$ sont cohomologues.*

Montrons que la formule d'homotopie entraîne le lemme de Poincaré. Soit P une application constante. Soit ω une forme fermée. Alors $\text{Id}^*\omega - P^*\omega$ est exacte. Or $P^*\omega = 0$ et $\text{Id}^*\omega = \omega$. Le lemme de Poincaré suit.

Avant de démontrer la formule d'homotopie nous avons besoin de décrire les formes différentielles sur $M \times [0, 1]$

34.2 Démonstration de la formule d'homotopie

Introduisons quelques notations :

34.2.1 Formes différentielles sur $M \times [0, 1]$

- Pour tout m de M , notons c_m la courbe tracée sur M donnée par $u \rightarrow (m, u)$. Nous noterons ∂_t le champ de vecteur sur $M \times [0, 1]$ défini par

$$\partial_t(m, s) = \dot{c}_m(s),$$

- Nous noterons également t la projection de $M \times [0, 1]$ sur le deuxième facteur et dt sa différentielle. On a $dt(\partial_t) = 1$
- Pour tout t , nous noterons enfin j_t l'injection de M dans $M \times [0, 1]$ donné par $m \mapsto (m, t)$

Précisons les notations dans le lemme suivant. Si β est une forme $M \times [0, 1]$, $j_t^*\beta$ devient une famille de formes sur M , dépendant d'un paramètre, sur M . On pose alors

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} j_s^* \alpha : m \rightarrow \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} (j_s^* \alpha)_m.$$

Lemme 34.2.1. [UN CAS PARTICULIER DE LA FORMULE DE LIE-CARTAN] *Soit α une forme sur $M \times [0, 1]$ alors*

$$\left. \frac{d}{du} \right|_{u=s} j_u^* \alpha = j_s^* t_{\partial_t} \alpha + j_s^* d(t_{\partial_t} \alpha). \quad (34.1)$$

DÉMONSTRATION : Soit $(U, (x_1, \dots, x_n))$ une carte sur M . Nous allons raisonner dans $U \times [0, 1]$.

Pour éviter les confusions, nous noterons $\hat{x}_i$, la fonction x_i vu comme fonction sur $M \times [0, 1]$, de telle sorte que pour tout s ,

$$j_s^* d\hat{x}_i = dx_i, \quad t_{\partial_t} d\hat{x}_i = 0.$$

Supposons α de degré p . Nous pouvons écrire

$$\alpha = dt \wedge \underbrace{\left(\sum_{I \in \mathcal{I}(p)} \alpha_0^I(X, s) d\hat{x}_I \right)}_{\alpha_0} + \underbrace{\sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \alpha_1^J(X, s) d\hat{x}_J}_{\alpha_1}.$$

Nous observons que $\iota_{\partial_t} \alpha = \alpha_0$ et que

$$j_s^* \alpha = j_s^* \alpha_1 = \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \alpha_1^J(X, s) dx_J.$$

Nous obtenons donc

$$d(j_s^* \iota_{\partial_t} \alpha) = d(j_s^* \alpha_0), \quad (34.2)$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{I}(p), i} \frac{\partial \alpha_0^I}{\partial x_i}(X, s) dx_i \wedge dx_I. \quad (34.3)$$

Par ailleurs,

$$d\alpha = \sum_{I \in \mathcal{I}(p), i} \frac{\partial \alpha_0^I}{\partial x_i}(X, s) d\hat{x}_i \wedge dt \wedge d\hat{x}_I \quad (34.4)$$

$$+ \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \sum_i \frac{\partial \alpha_0^I}{\partial x_i}(X, s) d\hat{x}_i \wedge d\hat{x}_J + \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \frac{\partial \alpha_1^J}{\partial t}(X, s) dt \wedge d\hat{x}_J. \quad (34.5)$$

Ainsi

$$\iota_{\partial_t} d\alpha = \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \frac{\partial \alpha_1^J}{\partial t}(X, s) d\hat{x}_J - \sum_{I \in \mathcal{I}(p), i} \frac{\partial \alpha_0^I}{\partial x_i}(X, s) d\hat{x}_i \wedge d\hat{x}_I, \quad (34.6)$$

et

$$j_s^* \iota_{\partial_t} d\alpha = \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \frac{\partial \alpha_1^J}{\partial t}(X, s) dx_J - \sum_{I \in \mathcal{I}(p), i} \frac{\partial \alpha_0^I}{\partial x_i}(X, s) dx_i \wedge dx_I. \quad (34.7)$$

En conclusion

$$j_s^* d(\iota_{\partial_t} \alpha) + j_s^* \iota_{\partial_t} d\alpha = \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1), i} \frac{\partial \alpha_1^J}{\partial t}(X, s) dx_J, \quad (34.8)$$

$$= \left. \frac{d}{du} \right|_{u=s} j_u^* \alpha. \quad (34.9)$$

La démonstration de notre formule est terminée. $\square$

Nous généraliserons plus tard la formule de Lie–Cartan dans le lemme 37.3.2. Nous utiliserons alors le cas particulier démontré ci-dessus. En exercice, nous proposerons une

démonstration indépendante utilisant une récurrence sur le degré de la forme ; cet exercice peut se faire dès maintenant.

EXERCICE : Nous proposons en exercice une approche plus conceptuelle de la formule de Lie-Cartan. La démonstration se fait par récurrence sur le degré de la forme α

1. Montrez la formule pour $k = 0$.
2. Supposez vraie la formule pour toute les formes de degré k , montrez la formule de Lie-Cartan pour les formes de degré $k + 1$ qui s'écrivent $f d\alpha$ avec f une fonction et α de degré k . On utilisera la propriété fondamentale de la différentielle extérieure : $d(f d\alpha) = df \wedge d\alpha$.
3. Conclure.

34.2.2 Un cas particulier de la formule d'homotopie

Nous allons démontrer un cas particulier mais plus précis de la formule d'homotopie qui entraînera la cas général. Nous montrons

Lemme 34.2.2. Soit H défini de $\Omega^{k+1}(M \times [0, 1])$ dans $\Omega^k(M)$ par

$$H(\beta) = \int_0^1 j_s^* \iota_{\partial_t} \beta ds.$$

Alors pour toute forme α définie sur $M \times [0, 1]$ nous avons

$$j_1^* \alpha - j_0^* \alpha = d(H\alpha) + Hd(\alpha).$$

DÉMONSTRATION : En effet

$$j_1^* \alpha - j_0^* \alpha = \int_0^1 \frac{d}{du} \Big|_{u=s} j_u^* \alpha ds, \quad (34.10)$$

$$= \int_0^1 j_s^* \iota_{\partial_t} d\alpha + d(j_s^* \iota_{\partial_t} \alpha) ds, \quad (34.11)$$

$$= \int_0^1 j_s^* \iota_{\partial_t} d\alpha ds + d \left(\int_0^1 j_s^* \iota_{\partial_t} \alpha ds \right), \quad (34.12)$$

$$= Hd(\alpha) + d(H\alpha). \quad (34.13)$$

□

34.2.3 Preuve de la formule d'homotopie

Nous considérons une homotopie F entre F_0 et F_1 . Autrement dit,

$$F_0 = F \circ j_0,$$

$$F_1 = F \circ j_1.$$

Nous en déduisons que

$$F_1^* \alpha - F_0^* \alpha = d(H \circ F^*(\alpha)) - H \circ F^* d\alpha.$$

Le lemme suit de cette observation.

34.3 Cohomologie de Rham

Définition 34.3.1. Le k -ème groupe de cohomologie de Rham de la variété M – noté $H^k(M)$ – est le quotient des formes fermées de degré k par les formes exactes :

$$H^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\} / \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{k-1}(M)\}.$$

Si ω est une forme fermée, nous noterons $[\omega]$ sa classe de cohomologie, c'est-à-dire sa projection dans $H^k(M)$.

Le k -ème nombre de Betti de la variété M – noté $b^k(M)$ – est la dimension de son k -ème groupe de cohomologie de Rham.

REMARQUES :

1. Le nombre de composantes connexes de M est $b^0(M)$.
2. Le lemme de Poincaré nous dit que pour une variété contractile M , $b^k(M) = 0$ pour $k > 0$.
3. Un théorème de Rham affirme que les nombres de Betti d'une variété compacte sont finis.
4. Par définition deux formes sont cohomologues si leur classes de cohomologie sont égales.

Introduisons de nouvelles notions relatives à l'homotopie

Définition 34.3.2. Une application F de classe C^∞ d'une variété M vers une variété N est une équivalence d'homotopie s'il existe une application C^∞ de N dans N telle que $G \circ F$ est homotope à l'identité dans M et $F \circ G$ est homotope à l'identité de N . Une sous-variété N de M est un retract par déformation de M si il existe une application R de $M \times [0, 1]$ dans M telle que

- (i) Pour tout m de M , $R(m, 0) = m$.
- (ii) Pour tout n de N et tout t , $R(n, t) = n$.
- (iii) Pour tout m de M , $R(m, 1)$ appartient à N .

REMARQUES :

1. L'injection d'un retract par déformation est une équivalence d'homotopie.
2. L'injection d'un point dans une variété contractile est une équivalence d'homotopie.
3. L'application $m \mapsto (m, 0)$ est une équivalence d'homotopie de M dans $M \times]-1, 1[$.
4. Un difféomorphisme est une équivalence d'homotopie.
5. La composée de deux équivalences d'homotopie est une équivalence d'homotopie.

La proposition-définition suivante est une conséquence de l'égalité $d \circ F^* = F^* \circ d$ et sa démonstration est laissée en exercice

Proposition 34.3.3. *Soit F une application C^∞ d'une variété M dans une variété N . Il existe alors une unique application notée $[F^*]$ et dite induite en cohomologie par F – ou F^* lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté – définie de $H^k(N)$ dans $H^k(M)$ par*

$$[F^*](\omega) = [F^*(\omega)].$$

Nous avons alors

Théorème 75. *Si F et G sont deux applications C^∞ homotopes d'une variété M dans une variété N , alors*

$$[F^*] = [G^*].$$

Nous en déduisons immédiatement

Corollaire 34.3.4. *Nous avons*

- (i) *Une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme entre les groupes de cohomologie.*
- (ii) *Deux variétés difféomorphes ont les mêmes nombres de Betti.*
- (iii) *Si N est un retract par déformation de M , M et N ont des cohomologies isomorphes.*

DÉMONSTRATION : La démonstration du théorème est une conséquence immédiate de la formule d'homotopie. $\square$

34.4 Calculs de cohomologie

34.4.1 La cohomologie du cercle

Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$.

Nous montrons

Théorème 76. *Nous avons*

$$b^0(S^1) = 1 \tag{34.14}$$

$$b^1(S^1) = 1 \tag{34.15}$$

$$\tag{34.16}$$

DÉMONSTRATION : On écrit $S^1 = U \cup V$, où $U = S^1 \setminus \{u\}$ et $V \setminus \{u\}$ sont deux ouverts contractiles telle que $U \cap V = A \sqcup B$, où A et B sont deux ouverts connexes disjoints.

Soit ω une 1-forme sur S^1 . Il existe f définie sur U telle que $df = \omega$ et g définie sur V telle que $dg = \omega$. En particulier $f - g$ est localement constante sur $U \cap V$. Dès lors $f - g = a$ sur A et $f - g = b$ sur B , où a et b sont deux constantes réelles.

L'application $\omega \rightarrow a - b$ ne dépend pas du choix de f et g , elle ne dépend que de la classe de cohomologie de ω . Nous venons de construire une application J de $H^1(S^1)$ dans $\mathbb{R}$. On vérifie que si $J(\omega) = 0$ alors on peut choisir les primitives f et g de façon à ce qu'elles coïncident sur $U \cap V$ et en particulier ω est exacte.

L'application J est donc injective et puisque $H^1(S^1)$ est non trivial, J est un isomorphisme. Nous venons de montrer que $b^1(S^1) = 1$. Par ailleurs S^1 étant connexe, $b^0(S^1) = 1$. $\square$

Nous notons c l'application définie de $[0, 1]$ dans S^1 par $c(t) = e^{2\pi i t}$. Remarquons que

$$\int_c df = 0.$$

En particulier l'application $[c] : H^1(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $[\omega]$ associe $\int_c \omega$ est bien définie.

Proposition 34.4.1. *L'application $[c]$ est un isomorphisme*

DÉMONSTRATION : Nous savons que $[c]$ est surjective car $\int_c d\theta$ est non nulle. Elle est donc injective car $b^1(S^1) = 1$. $\square$

34.4.2 La cohomologie des sphères

Théorème 77. *Nous avons*

$$b^0(S^n) = 1 \quad (34.17)$$

$$b^n(S^n) = 1 \quad (34.18)$$

$$b^k(S^n) = 0 \text{ si } 0 < k < n. \quad (34.19)$$

On montre tout d'abord $H^1(S^n) = 0$ si $n > 1$. On construit ensuite un isomorphisme entre $H^k(S^n)$ et $H^{k-1}(S^{n-1})$ si $k > 2$. Détaillons cette construction.

On considère deux points u et v de S^n . On pose $U = S^n \setminus \{u\}$ et $V = S^n \setminus \{v\}$. On remarque alors que $U \cup V = S^n$ et que U et V sont contractiles.

La proposition cruciale est la suivante

Proposition 34.4.2. *Il existe une unique application J linéaire définie de $H^k(S^n)$ dans $H^{k-1}(U \cap V)$ caractérisée par*

$$J([\omega]) = [\beta - \alpha].$$

- Pour toute forme $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ telle que $d\alpha = \omega$ sur U .
- Pour toute forme $\beta \in \Omega^{k-1}(V)$ telle que $d\beta = \omega$ sur V

DÉMONSTRATION : Avec les notations de la proposition, on remarque que $\beta - \alpha$ est effectivement fermée. Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer que $[\beta - \alpha]$ ne dépend que de la classe de cohomologie de ω . C'est une vérification que nous laissons en exercice. La linéarité suit de l'unicité. $\square$

Nous avons alors

Proposition 34.4.3. *L'application J décrite par la proposition est une bijection si $k > 1$.*

DÉMONSTRATION : On utilise la fonction ψ qui vaut 1 au voisinage de u et 0 au voisinage de v . On remarque que si ξ est une forme définie sur $U \cap V$ alors $\psi\xi$ est définie sur U et $(1 - \psi)\xi$ est définie sur V .

Montrons l'injectivité de J . Supposons $\beta - \alpha = d\gamma$. Alors $\hat{\beta} = \beta + d((1 - \psi)\gamma)$ est définie sur U et $\hat{\alpha} = \alpha - d(\psi\gamma)$ est définie sur V . Par ailleurs $d\hat{\beta} = \omega$ sur U et $d\hat{\alpha} = \omega$ sur V . Enfin

par construction $\hat{\beta} = \hat{\alpha}$ sur $U \cap V$. Nous obtenons une primitive de ω en posant $\hat{\omega} = \hat{\beta}$ sur V et $\hat{\omega} = \hat{\alpha}$ sur U . Autrement dit si $J[\omega] = 0$, alors ω est exacte et donc $[\omega] = 0$.

Montrons la surjectivité de ω . Soit γ une $k-1$ forme fermée définie sur $U \cap V$. Posons $\omega = d\psi \wedge \gamma$ qui est bien définie sur S^n car $d\psi$ s'annule au voisinage de u et v . La forme ω est fermée et on vérifie alors que $J[\omega] = [\gamma]$. $\square$

Comme $U \cap V$ est équivalent en homotopie à S^{n-1} on en déduit que $H^k(S^n)$ est isomorphe à $H^{k-1}(S^{n-1})$. Pour achever la démonstration du théorème 77 par récurrence et se ramener à la proposition 76, il suffit de montrer

Proposition 34.4.4. *Nous avons $b^1(S^n) = 0$ si $n > 1$.*

DÉMONSTRATION : On raisonne de manière analogue. Si ω est une forme de degré 1. Elle possède des primitives f et g sur U et V respectivement. Comme $U \cap V$ est connexe, $f - g$ de différentielle nulle est une constante k . Une primitive de ω est alors définie par $\phi = f + k$ sur U et $\phi = g$ sur V . $\square$

34.4.3 Cohomologie de $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points

La proposition suivante nous permet de compter le nombre d'éléments d'une sous-ensemble du plan de manière certes compliquée mais en étudiant seulement le complémentaire de cet ensemble.

Proposition 34.4.5. *Nous avons*

$$b^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_p\}) = p. \quad (34.20)$$

DÉMONSTRATION : On supposera pour simplifier que $x_i = (i, 0)$. Nous pouvons écrire

$$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_p\} = U \cap V, \quad (34.21)$$

où U et V sont deux ouverts contractiles et où

$$U \cap V = \bigcup_{i=0}^{i=n} A_i,$$

pour des ouverts A_i connexes. Soit ω une forme fermée sur M et f et g deux primitives de ω sur U et V respectivement. On remarque que $f - g$ est localement constante et vaut une constante k_i sur A_i . On montre ensuite que l'application

$$J : [\omega] \mapsto (k_1 - k_0, \dots, k_p - k_0),$$

est bien définie de $H^1(M)$ dans $\mathbb{R}^p$. On remarque alors que J est injective. On montre que J est surjective soit en utilisant des partitions de l'unité, soit en considérant la forme

$$\omega_i = T_i^* d\theta,$$

où $T_i : x \rightarrow x - x_i$ est définie de M dans $\mathbb{R}^2$ et en calculant $J(\omega_i)$. $\square$

Chapter 35

Orientation et variétés à bord

35.1 Formes volumes et orientation

Définition 35.1.1. [FORME VOLUME] Soit M une variété. Une forme volume sur M est une forme de degré maximale qui ne s'annule jamais. Deux formes volumes α et β définissent la même orientation si $\alpha = f \cdot \beta$ où f est une fonction strictement positive. La classe d'orientation d'une forme volume est l'ensemble des formes volumes définissant la même orientation.

REMARQUES :

1. La forme $\text{Vol}_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ est une forme volume sur $\mathbb{R}^n$.
2. Si α et β sont deux formes volumes sur une variété connexe, alors soit α à la même orientation que β , soit α à la même orientation que $-\beta$.
3. Définir la même orientation est une relation d'équivalence sur les formes volumes.

Définition 35.1.2. [ORIENTATION] Une variété est orientable si elle possède une forme volume. Le choix d'une classe d'orientation définit une orientation sur M . L'orientation définie par une forme volume est celle donnée par sa classe d'orientation. L'orientation opposée de celle définie par ω est l'orientation définie par $-\omega$.

REMARQUES :

1. Une variété connexe orientable à exactement deux orientations.
2. L'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$ est celle donnée par Vol_n .

Définition 35.1.3. [ORIENTATION ET DIFFÉOMORPHISME] Soit M et N sont deux variétés orientées par les formes volumes ω_M et ω_N . Un difféomorphisme ϕ de M sur N préserve l'orientation si $\phi^* \omega_N$ définit la même orientation que ω_M , il renverse l'orientation si $\phi^* \omega_N$ définit l'orientation opposée à ω_M .

REMARQUES :

1. Si ϕ est un difféomorphisme d'une variété M connexe alors soit ϕ conserve l'orientation, soit ϕ renverse l'orientation et ceci quelle que soit l'orientation de M .
2. Rappelons que si ϕ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, son jacobien est défini par

$$J(\phi)_x = \det(D_x \phi).$$

Alors ϕ conserve l'orientation si son jacobien est positif, il renverse l'orientation si son jacobien est négatif.

La proposition suivante nous donne un critère d'orientabilité

Proposition 35.1.4. *Une variété M est orientable si et seulement si il existe un atlas $\{(U_i, X_i)\}_{i \in I}$ dont les changements de cartes $X_j \circ X_i^{-1}$ conservent l'orientation.*

L'orientation associée à un tel atlas est alors celle pour laquelle les coordonnées conservent l'orientation.

35.2 Variétés à bord

35.2.1 Le demi-espace

Définition 35.2.1. [DEMI-ESPACE]

(i) Le demi-espace est

$$\mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < 0\}.$$

(ii) Le bord du demi espace est

$$\partial \mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$$

(iii) Si U est un ouvert de $\mathbb{H}^n$, le bord de U est

$$\partial U := U \cap \partial \mathbb{H}^n.$$

(iv) L'intérieur d'un ouvert U est l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par $\text{int}(U) := U \setminus \partial U$.

(v) Une fonction – ou une application – continue f définie sur un ouvert U de $\mathbb{H}^n$ est de classe C^∞ si elle est la restriction d'une fonction – ou d'une application – C^∞ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(vi) Un homéomorphisme de U sur V est un difféomorphisme s'il est C^∞ ainsi que son inverse.

Signalons les propriétés intéressantes suivantes

Proposition 35.2.2. (i) Si ϕ est un difféomorphisme alors $\phi(\partial U) = \partial(\phi(U))$.

(ii) L'application F est C^∞ , si elle est C^∞ sur $\text{int}(U)$ et si ses dérivées partielles s'étendent continûment à U .

35.2.2 Variétés à bord

Nous pouvons maintenant mot pour mot étendre la définition des variétés aux variétés à bord à en parlant de cartes à bord qui sont des cartes à valeurs dans le demi espace. Il nous reste à introduire une définition

Définition 35.2.3.

Le bord ∂M d'une variété à bord est l'ensemble de points m de M qui possède une carte (U, X) telle que $X(m)$ appartienne au bord de $X(U)$.

REMARQUES :

1. Si m est un point du bord, d'après la proposition 35.2.2, pour toute carte (V, Y) , $Y(m)$ appartient au bord de $V(Y)$.
2. Si f est une fonction d'une variété M à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si y est un nombre tel que f est une submersion le long de $f^{-1}(y)$ alors $f^{-1}[y, +\infty[$ est une variété à bord dont le bord est $f^{-1}(y)$.
3. On peut montrer – c'est le théorème du collier – que toute variété à bord est obtenu par la procédure précédente.

On définit alors comme pour les variétés les fonctions, applications, formes différentielles et champ de vecteurs C^∞ sur les variétés à bord. Nous identifierons enfin l'espace tangent au bord de M en un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à M en m . Cet hyperplan vectoriel $T_m \partial M$ sépare l'espace vectoriel $T_m M$ en deux composantes que nous pouvons distinguer

Définition 35.2.4. Soit m un point du bord de M et X un vecteur tangent en m .

- (i) Le vecteur X est normal si X n'est pas tangent à ∂M , c'est-à-dire s'il n'appartient pas à $T_m \partial M$.
- (ii) Le vecteur X est normal extérieur si il est normal et s'il existe une courbe $c : [0, 1] \rightarrow M$ telle que $\dot{c}(1) = X$.

On montre alors en utilisant des partitions de l'unité

Proposition 35.2.5. Toute variété à bord admet un champ de vecteur normal extérieur le long de son bord.

35.2.3 Orientation du bord d'une variété à bord

Définition 35.2.6. Soit M une variété à bord, orientée par une forme volume Ω . L'orientation canonique du bord ∂M est celle définie par $\iota_X \omega$ où X est un champ de vecteur normal extérieur.

On vérifie alors que l'orientation du bord de $\mathbb{H}^n$ donnée par cette convention est celle donnée par $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Chapter 36

Intégration des formes différentielles

36.1 Intégration sur $\mathbb{R}^n$

Nous noterons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Nous introduisons alors la définition suivante

Définition 36.1.1. Soit $\omega = f \text{Vol}_n$ une forme de degré maximale à support compacte sur $\mathbb{R}^n$. L'intégrale de la forme ω sur $\mathbb{R}^n$ est le nombre réel défini par

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda.$$

L'intérêt de cette définition est que la formule de changement de variables s'écrit très simplement

Proposition 36.1.2. [CHANGEMENT DE VARIABLES] Soit ϕ un difféomorphisme préservant l'orientation de U sur un ouvert $\phi(U)$. Soit ω une forme de degré maximal définie sur U et à support compact. Alors

$$\int_U \phi^* \omega = \int_{\phi(U)} \omega.$$

DÉMONSTRATION : Ceci suite de la formule de changement de variables pour les fonctions :

$$\int_U (f \circ \phi) |J(\phi)| d\lambda = \int_{\phi(U)} f d\lambda.$$

□

36.2 Intégration sur une variété

Soit M une variété orientée – éventuellement à bord – de dimension n . Soit $\Omega_c^n(M)$ l'espace vectoriel des formes différentielles de degré n à support compact.

Théorème 78. *Il existe une unique forme linéaire de $\Omega_c^n(M)$ à valeurs réelles*

$$\omega \rightarrow \int_M \omega,$$

telle que si (U, X) est une carte préservant l'orientation et si ω est à support compact dans U alors

$$\int_M \omega = \int_{X(U)} (X^{-1})^* \omega.$$

Ceci nous conduit à la définition suivante

Définition 36.2.1. *Le nombre $\int_M \omega$ est l'intégrale de ω sur M .*

DÉMONSTRATION : Le premier point à démontrer est l'unicité. Soit donc $\{(V_i, Y_i)\}_{i \in I}$ un atlas préservant l'orientation et soit ϕ_i une partition de l'unité subordonnée à V_i . Soit $\omega \in \Omega_c^n(M)$; nous pouvons donc écrire

$$\omega = \sum_i \phi_i \omega,$$

où les $\phi_i \omega$ sont des formes à support dans V_i . Soit $\omega \rightarrow \int_M \omega$ vérifiant les propriétés du théorème. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \sum_{i \in I} \int_M \phi_i \omega \\ &= \sum_{i \in I} \int_{Y_i(V_i)} (Y_i^{-1})^* \phi_i \omega. \end{aligned} \quad (36.1)$$

Or l'équation (36.1) définit de manière univoque $\int_M \omega$. Ceci démontre bien l'unicité.

Pour démontrer l'existence, nous allons utiliser l'équation (36.1) pour définir l'intégrale. Soit donc $\mathcal{A} = \{(V_i, Y_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ comme dans le début de la démonstration et posons

$$\int_M^{\mathcal{A}} \omega := \sum_{i \in I} \int_{Y_i(V_i)} (Y_i^{-1})^* \phi_i \omega. \quad (36.2)$$

Pour conclure, il nous suffit donc de montrer que si (U, X) est une carte et ω à support dans U alors

$$\int_{X(U)} (X^{-1})^* \omega = \int_M^{\mathcal{A}} \omega. \quad (36.3)$$

Comme $(Y_i^{-1})^* \phi_i \omega$ est à support dans $Y_i(U \cap V_i)$, on a par la formule de changement de variables

$$\int_{Y_i(V_i)} (Y_i^{-1})^* \phi_i \omega = \int_{Y_i(V_i \cap U)} (Y_i^{-1})^* \phi_i \omega = \int_{X(V_i \cap U)} (X^{-1})^* \phi_i \omega. \quad (36.4)$$

Ainsi,

$$\int_M^{\mathcal{A}} \omega = \sum_{i \in I} \int_{X(V_i \cap U)} (X^{-1})^* \phi_i \omega$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i \in I} \int_{X(U)} (X^{-1})^* \phi_i \omega \\
 &= \int_{X(U)} (X^{-1})^* \omega.
 \end{aligned} \tag{36.5}$$

La démonstration du théorème est finie. $\square$

36.3 La formule de Stokes

Notre but est d'énoncer la formule de Stokes et de donner quelques applications dans la section suivante.

Théorème 79. [FORMULE DE STOKES] *Soit ω une forme à support compact sur la variété M . Alors*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{36.6}$$

REMARQUES :

1. Cette formule est une généralisation de la formule

$$\int_a^b df = f(b) - f(a),$$

qui est la formule de Stokes en degré 1.

2. Formellement en considérant $\int_M \omega$ comme un appariement entre M et ω , la différentielle extérieure apparaît comme la duale de l'opération "prendre le bord".
3. Si le bord de M est vide, la formule de Stokes se lit

$$\int_M d\omega = 0,$$

DÉMONSTRATION : En utilisant une partition de l'unité et la linéarité de l'intégrale, nous pouvons supposer que ω est à support dans un ouvert de carte. En utilisant les coordonnées et la formule de changement de variables, nous sommes ramenés à démontrer la formule de Stokes pour une forme à support compact dans le demi espace.

Nous noterons

$$\widehat{dx_i} = \iota_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 d(\widehat{dx_i}) &= 0, \\
 dx_i \wedge \widehat{dx_i} &= \text{Vol}_n, \\
 dx_j \wedge \widehat{dx_i} &= 0 \text{ si } i \neq j.
 \end{aligned}$$

Par convention, le bord du demi-espace est orienté par $\widehat{dx}_1 = dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Soit donc ω une $(n-1)$ -forme différentielle à support compact dans $\mathbb{H}^n$. Nous avons

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=n} f_i \widehat{dx}_i.$$

Intégrons tout d'abord ω sur le bord du demi-espace. Les formes $\widehat{dx}_i$ s'annulent sur l'espace tangent au demi-espace pour i strictement plus grand que 1, nous en déduisons que

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \int_{\partial \mathbb{H}^n} f_1 \widehat{dx}_1 = \int_{\partial \mathbb{H}^n} f_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (36.7)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{i=n} df_i \wedge \widehat{dx}_i \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge \widehat{dx}_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \text{Vol}_n. \end{aligned} \quad (36.8)$$

Nous nous intéressons au terme de droite de l'équation ci-dessus. En utilisant le théorème de Fubini et en intégrant sur les droites parallèles aux axes, nous avons donc pour $i > 1$

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = \int \int \dots \int \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) \widehat{dx}_i = 0. \quad (36.9)$$

La dernière égalité vient de ce que f_i est à support compact. Pour $i = 1$ nous obtenons, toujours en utilisant que f_1 est à support compact, la formule suivante

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n = \int \int \dots \int \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \right) \widehat{dx}_1 = \int_{\partial \mathbb{H}^n} f_1 \widehat{dx}_1. \quad (36.10)$$

En combinant les équations (36.7), (36.8) (36.9) et (36.10), nous obtenons la formule de Stokes. $\square$

36.4 Applications de la formule de Stokes

Nous allons trois donner trois applications différentes de la formule de Stokes, tout d'abord la formule de Green-Ostrogradski, puis le théorème du point fixe de Brouwer et enfin nous calculerons la cohomologie en degré maximal.

36.4.1 Divergence et formule de Green-Ostrogradski

Nous noterons $\langle, \rangle$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Soit $\xi = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Par définition, la *divergence* du champ de vecteur ξ est la fonction

$$\text{div}(\xi) := \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}.$$

Le lien entre la divergence et la différentielle extérieure est donnée par la formule

$$d(\iota_\xi \text{Vol}_n) = \text{div}(\xi) \text{Vol}_n,$$

dont nous laissons la démonstration au lecteur.

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ qui est une variété à bord, la *mesure d'aire* est la mesure donnée par la forme volume

$$\text{Aire}_{\partial O} = i_N \text{Vol}_n,$$

où N est le champ de vecteur normé orthogonal à l'espace tangent au bord de O et dirigé vers l'extérieur de O .

La formule d'Ostrograski est une nouvelle formulation de la formule de Stokes

Théorème 80. [FORMULE DE GREEN-OSTROGRADSKI] Soit ξ un champ de vecteurs défini sur un ouvert à bord O , alors

$$\int_O \text{div}(\xi) \text{Vol}_n = \int_{\partial O} \langle \xi, N \rangle \text{Aire}_{\partial O}.$$

DÉMONSTRATION : Cette formule suit de la formule de Stokes et de l'observation suivante : en tant que formes restreintes à ∂O nous avons

$$i_\xi \text{Vol}_n = \langle \xi, N \rangle \text{Aire}_{\partial O}.$$

Cette formule est en fait équivalente à la formule de Stokes pour les ouverts à bord de $\mathbb{R}^n$. $\square$

36.4.2 Le théorème du point fixe de Brouwer

Soit $B_n := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| \leq 1\}$ la boule de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 81. [BROUWER] Toute application continue de la boule dans elle-même possède un point fixe. Autrement dit pour toute application F continue de B_n dans elle-même, il existe x tel que $F(x) = x$.

La démonstration se fait en trois étapes.

Rétraction

Nous dirons qu'une application G de B_n dans $S^{n-1} = \partial B_n$ est une *rétraction* si $G|_{S^{n-1}}$ est l'identité. Nous montrons

Théorème 82. Il n'existe pas de rétraction C^∞ de B_n dans S^{n-1} .

DÉMONSTRATION : Soit F une telle restriction. Soit ω une forme volume sur S^{n-1} . Alors

$$\int_{S^{n-1}} \omega \neq 0. \quad (36.11)$$

Par ailleurs

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{S^{n-1}} F^* \omega = \int_{B_n} d(F^* \omega).$$

Mais $d(F^* \omega) = F^*(d\omega) = 0$ car ω est de degré maximal sur S^{n-1} donc fermée. Nous obtenons la contradiction en comparant avec l'équation (36.11). Il n'existe donc pas de rétraction de B_n sur son bord. $\square$

Le cas lisse du théorème de Brouwer

Nous montrons

Théorème 83. *Toute application C^∞ de la boule dans elle-même possède un point fixe.*

DÉMONSTRATION : Nous raisonnons par l'absurde et soit G est une application sans point fixe de la boule dans elle-même, nous construisons une rétraction F de B_n dans son bord, en posant

$$F(x) = y,$$

où y est le l'intersection – du côté de x – de la droite passant par x et $G(x)$ avec le bord de S^{n-1} . Ceci nous fournit une contradiction.

Approximation et conclusion

Pour conclure, il nous suffit de montrer que s'il existe une application continue G sans point fixe, alors il existe une application C^∞ sans point fixe F de la boule dans elle-même. Soit donc G un application continue sans point fixe de la boule dans elle-même. Il existe donc un réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout x de B_n , on a

$$\|x - G(x)\| > 4\epsilon.$$

Soit donc $\lambda = 1 - \epsilon$. Alors $G_\lambda : x \rightarrow \lambda G(x)$ vérifie

$$\|x - G_\lambda(x)\| \geq \|x - G(x)\| - \epsilon \|G(x)\| > 3\epsilon.$$

On sait – par exemple en utilisant une convolution – qu'il existe une application F de classe C^∞ et ϵ -proche de G_λ , c'est-à-dire que pour tout x de B_n ,

$$\|F(x) - G_\lambda(x)\| \leq \epsilon.$$

Alors F envoie la boule dans elle-même :

$$\|F(x)\| \leq \|G_\lambda(x)\| + \epsilon \leq \lambda + \epsilon = 1.$$

De plus, F n'a pas de point fixe

$$\|F(x) - x\| \geq \|G(x) - x\| - \|x - F(x)\| \geq 2\epsilon - \epsilon = \epsilon.$$

Nous pouvons donc déduire le théorème du résultat du paragraphe précédent. $\square$

36.4.3 Cohomologie en degré maximal

Nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 84. *Soit M une variété connexe orientée. Soit ω un forme à support compact de degré maximal défini sur M . Alors, il existe une forme α à support compact définie sur M telle que $d\alpha = \omega$ si et seulement si*

$$\int_M \omega = 0.$$

Nous en déduisons le corollaire suivant

Corollaire 36.4.1. *Si M est une variété compacte, connexe et orientable de dimension n alors $b^n(M) = 1$. En particulier, une variété compacte orientable n'est jamais contractile.*

La démonstration se fait en plusieurs étapes

Le cas des sphères

Nous avons vu que $b^n(S^n) = 1$. L'application $\omega \rightarrow \int_{S^n} \omega$ est une application bien définie de $H^n(S^n)$ dans $\mathbb{R}$. S^n admettant une forme volume – qui est donc d'intégrale non nulle – cette application est une bijection. Le résultat suit.

Le cas de $\mathbb{R}^n$

On considère le difféomorphisme I de $\mathbb{R}^n$ avec $S^n \setminus \{\text{infy}\}$. Nous remarquons que ω est à support compact dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe une forme différentielle $\hat{\omega}$ nulle au voisinage de ∞ telle que $\omega = I^* \hat{\omega}$.

Soit donc ω et support compact sur $\mathbb{R}^n$ et d'intégrale nulle. Il existe alors $\hat{\omega}$ nulle au voisinage de ∞ telle que $\omega = I^* \hat{\omega}$. En particulier

$$\int_{S^n} \hat{\omega} = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0.$$

Nous déduisons du paragraphe précédent que $\omega = d\beta$. A priori, β n'est pas nulle au voisinage de ∞ . Par contre $d\beta = 0$ au voisinage de l'infini. Il existe donc γ définie au voisinage de ∞ telle que $d\gamma = \beta$. En choisissant ϕ constante égale à 1 au voisinage de ∞ de support inclus dans le domaine de définition de γ , on pose

$$\alpha = \beta - d(\phi\beta).$$

Alors $\alpha = 0$ au voisinage de ∞ et

$$d\alpha = d\beta = \hat{\omega}.$$

En particulier, $I^* \alpha$ est à support compact et $d(I^* \alpha) = \omega$.

Le cas général

Soit ω à support compact. Nous laissons en exercice le soin au lecteur de démontrer le résultat suivant.

Il existe une famille finie d'ouverts $\{U_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ difféomorphes à $\mathbb{R}^n$, telle que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ et $K \subset \bigcup_i U_i$.

Nous allons montrer par récurrence sur p qu'il existe une forme à support compact β_p , tel que dans $\omega - d\beta_p$ est à support compact dans $V_p = U_p \cup \dots \cup U_k$.

Supposons que cela soit vrai au rang p , posons alors $\omega_{p-1} = \omega - d\beta_{p-1}$. Nous pouvons écrire en utilisant une partition de l'unité

$$\omega_{p-1} = \gamma_p + \alpha_p,$$

où γ_p est à support compact dans U_p et α_p est à support compact dans V_p . Quelque soit l'ouvert non vide O , il existe une forme à support compact dans O et d'intégrale 1. En particulier, il existe une forme η_p à support dans $U_p \cap V_p$ telle que

$$\int_{U_p} \eta_p = \int_{U_p} \gamma_p.$$

D'après le paragraphe précédent et puisque U_p est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, il existe χ_p à support compact dans U_p telle que

$$\gamma_p = \eta_p + d\chi_p.$$

En particulier

$$\omega = \underbrace{\alpha_p + \eta_p}_{\omega_p} + \underbrace{d(\beta_{p-1} + \chi_p)}_{\beta_p},$$

où β_p est à support compact et ω_p est à support compact dans V_p . Nous avons terminé notre démonstration par récurrence. En particulier, il existe β à support compact telle que $\hat{\omega} = \omega - d\beta$ est à support compact dans U_k . Maintenant

$$\int_{U_k} (\hat{\omega}) = 0.$$

D'après le paragraphe précédent, il existe α à support dans U_k telle que

$$\hat{\omega} = d\alpha.$$

Ceci entraîne le théorème.

Chapter 37

Champ de vecteurs

Notons $\chi^\infty(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs C^∞ sur la variété M . Sur $\mathbb{R}^n$, un champ de vecteur décrit géométriquement une équation différentielle indépendante du temps. Le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles ordinaires se traduit en termes du *flot du champ de vecteur associé*.

37.1 Flot d'un champ de vecteurs

37.1.1 Flot d'un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$

Un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'une famille X de fonctions définie sur U .

$$X = (X_1, \dots, X_n).$$

L'équation différentielle associée est alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 &= X_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \\ \frac{d}{dt}x_n &= X_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Une *solution* de cette équation – ou *orbite du champ de vecteur* – est donc une courbe $c = (x_1, \dots, x_n)$ telle que $\dot{c} = X(c)$.

$$\phi : (x, t) \rightarrow \phi(x, t) = \phi_t(x),$$

La notion de *flot* est utile pour décrire les solutions.

Définition 37.1.1. [FLOT] *Un flot du champ de vecteurs X défini sur un ouvert U , est une application C^∞ $\phi : (x, t) \rightarrow \phi(x, t) = \phi_t(x)$, définie sur un ouvert O de $U \times \mathbb{R}$, vérifiant pour tout x , $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap O$ est un intervalle contenant 0 telle que*

- pour tout x , $\phi_0(x) = x$,
- pour tout x , $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) \Big|_{t=s} = X(\phi_s(x))$.

Les notions suivantes précisent le domaine de définition du flot.

Définition 37.1.2. [FLOT MAXIMAL, COMPLET] *Le flot ϕ est maximal si pour tout flot ϕ' est un flot défini sur O' , alors $O' \subset O$ et $\phi' = \phi|_{O'}$.*

Le flot est complet si $O = U \times \mathbb{R}$

Les théorèmes fondamentaux d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle et de leur dépendance C^∞ par rapport aux conditions initiales se réécrivent alors ainsi

Théorème 85. *Tout champ de vecteur admet un unique flot maximal.*

De plus, si X est à support compact dans U , alors le flot de X est complet.

L'unicité entraîne que, pourvu que les termes de l'équation soient définis, nous avons

$$\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x)).$$

En particulier si le flot est complet, pour tout t , l'application ϕ_t est un difféomorphisme. Ainsi, l'application $t \rightarrow \phi_t$ est un morphisme de groupe de $\mathbb{R}$ dans le groupe de difféomorphisme de $\mathbb{R}$.

37.1.2 Flot d'un champ de vecteurs sur une variété

Les notions d'orbites et de flot d'un champ de vecteur se généralisent aux variétés. Soit donc X un champ de vecteur défini sur une variété M .

Définition 37.1.3. *Une orbite du champ de vecteur est une courbe c telle que $\dot{c} = X(c)$.*

Un flot du champ de vecteurs X , est une application $C^\infty \phi : (x, t) \rightarrow \phi(x, t) = \phi_t(x)$, définie sur un ouvert O de $M \times \mathbb{R}$ contenant $M \times \{0\}$ telle que

- *pour tout x , $\phi_0(x) = x$,*
- *pour tout x , $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) \Big|_{t=s} = X(\phi_s(x))$.*

Le flot est maximal si pour tout flot ϕ' défini sur O' , alors $O' \subset O$ et $\phi' = \phi|_{O'}$.

Le flot est complet si $O = U \times \mathbb{R}$

La démonstration du théorème 86 étant locale, elle se généralise immédiatement au cas des variétés.

Théorème 86. *Tout champ de vecteur admet un unique flot maximal.*

De plus, si le champ de vecteur est à support compact, alors son flot X est complet.

37.1.3 Flot d'un champ de vecteur dépendant du temps

Un champ de vecteurs dépendant du temps est une famille $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de champs de vecteurs X_t pour t variant dans $\mathbb{R}$. Cette famille est C^∞ , si dans une carte $(U, (x_1, \dots, x_n))$ on peut écrire

$$X_t(m) = \sum_{i=1}^{i=n} f_i(m, t) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

où les fonctions f_i définies sur $U \times \mathbb{R}$ sont C^∞ .

Un tel champ est à support compact s'il est nul en dehors de $K \times \mathbb{R}$ où K est un compact de M

Définition 37.1.4. Le flot d'un champ de vecteur dépendant du temps est une application de O dans M où O est un ouvert de $M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ contenant $M \times \{(s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

$$(m, t, s) \rightarrow \phi_t^s(m),$$

telle que

- pour tout x , $\phi_s^s(x) = x$
- pour tout x , $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t^u(x) \Big|_{t=s} = X(\phi_s^u(x))$.

On définit de la même manière les flots maximaux et complets (tels que $O = M \times \mathbb{R}$).
Le théorème d'existence et d'unicité du flot est également vrai dans ce contexte.

Théorème 87. Tout champ de vecteur admet un unique flot maximal.

De plus, si le champ de vecteur est à support compact, alors son flot X est complet.

La démonstration, laissée en exercice, consiste à regarder le champ de vecteurs dépendant du temps X_t comme un champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$. Puis à construire le flot $\hat{\phi}$ de ce champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$, et à remarquer que $\hat{\phi}_t(m, s) = (K_t(m, s), s + t)$. L'application

$$(m, t, s) \rightarrow K_{t-s}(m, s),$$

est alors le flot de X_t .

REMARQUES :

1. Par unicité, le flot d'un champ de vecteurs dépendant du temps vérifie

$$\phi_v^u \circ \phi_u^s = \phi_v^s.$$

2. En particulier, si le flot est complet alors pour tout s et t , ϕ_t^s est un difféomorphisme de M , d'inverse ϕ_s^t .

37.2 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs

37.2.1 Dérivations

Nous avons vu que un vecteur tangent peut-être défini comme une dérivation en un point. De manière analogue, un champ de vecteur peut-être défini comme une dérivation.

Définition 37.2.1. Une dérivation sur une variété M est un endomorphisme linéaire ∂ de $C^\infty(M)$

- (i) $\partial f = 0$ s'annule au voisinage d'un point m , si f s'annule au voisinage de m ,
- (ii) $\partial(fg) = f\partial g + g\partial f$.

Nous avons alors

Proposition 37.2.2. Un champ de vecteur X en m_0 définit une dérivation ∂_X par $\partial_X := f \rightarrow df(X)$. Réciproquement toute dérivation provient d'un champ de vecteurs.

De nombreuses notations – dépendantes du contexte – sont utilisées pour noter la fonction $df(X)$ pour un champ de vecteur X et une fonction f : $L_X f$, $X.f$ ou $\partial_X f$.

37.2.2 Crochet de Lie

Nous déduisons de la caractérisation des champs de vecteurs comme des dérivation, l'importante définition suivante qui suit du fait élémentaire que si ∂_1 et ∂_2 sont des dérivations alors

$$[\partial_1, \partial_2] : f \rightarrow \partial_1(\partial_2(f)) - \partial_2(\partial_1(f)),$$

est également une dérivation.

Définition 37.2.3. Le crochet de Lie des deux champs de vecteurs X et Y , est le champ de vecteur $[X, Y]$ défini par

$$L_{[X, Y]} = [L_X, L_Y].$$

De la définition, nous déduisons aisément les propriétés formelles suivantes

Proposition 37.2.4. Nous avons

$$\begin{aligned} [fX, Y] &= f.[X, Y] - L_Y(f).X, \\ [X, Y] &= -[Y, X], \\ 0 &= [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y]. \end{aligned}$$

De la première formule, nous déduisons l'expression du crochet de Lie en coordonnées. Si $X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, alors

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Les deux dernières donnent à l'espace vectoriel des champs de vecteurs une structure d'algèbre de Lie.

37.2.3 Champ de vecteur et difféomorphismes

Nous verrons plus tard que si deux champs de vecteurs X et Y ont pour flot $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ et $\{\psi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$, alors $[X, Y] = 0$ si et seulement si ψ_s et ϕ_t commutent pour tout t .

Définition 37.2.5. Soit X un champ de vecteur sur M et ϕ un difféomorphisme de M sur N . Le transporté de X par ϕ est le champ de vecteur défini sur N par

$$\psi_*(X)(n) = T_{\psi^{-1}(n)}\psi(X(\psi^{-1}(n))).$$

On note aussi

$$\psi^* = (\psi^{-1})_*.$$

REMARQUES : On vérifie aisément les propriétés suivantes

1. $(\phi \circ \psi)_*(X) = \phi_*(\psi_*(X))$.
2. si c est une orbite de X alors $\psi \circ c$ est une orbite de $\psi_*(X)$
3. Si $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot de X , le flot de $\psi_*(X)$ est $\{\psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Le crochet des champs de vecteurs s'interprètent à l'aide du transport.

Proposition 37.2.6. Soit X un champ de vecteur de flot $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, alors

$$\left. \frac{d}{ds}(\phi_s)^*(Y) \right|_{s=0} = [X, Y]$$

De plus, si $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot de Y , alors $[X, Y] = 0$ si et seulement si ϕ_s et ψ_t commutent pour tout s et t

DÉMONSTRATION : Soit $Z = \left. \frac{d}{ds}(\phi_s)^*(Y) \right|_{s=0}$. Soit f une fonction, calculons $L_Z f$.

Par définition

$$L_Z f(m) = df_m \left(\left. \frac{d}{ds}(\phi_s^*(Y)(m)) \right|_{s=0} \right) \quad (37.1)$$

$$= df_m \left(\left. \frac{d}{ds}(\tau_{\phi_s(m)} \phi_{-s}(Y(\phi_s(m)))) \right|_{s=0} \right) \quad (37.2)$$

$$= \left. \frac{d}{ds} (df_m (\tau_{\phi_s(m)} \phi_{-s}(Y(\phi_s(m)))) \right|_{s=0} \quad (37.3)$$

$$= \left. \frac{d}{ds} df_{\phi_s(m)} (f \circ \phi_{-s})(Y(\phi_s(m))) \right|_{s=0}. \quad (37.4)$$

On considère la fonction $g_s(m) = df_m(f \circ \phi_{-s})(Y(\phi_s(m)))$. Nous venons de montrer que

$$L_Z f(m) = \left. \frac{d}{ds} g_s(\phi_s(m)) \right|_{s=0}.$$

Or

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s} g_t(\phi_s(m)) \right|_{s=0} &= L_X g_t(m), \\ \left. \frac{\partial}{\partial s} g_s(\phi_t(m)) \right|_{s=0} &= -d_{\phi_t}(m) L_X f(Y(\phi_t(m))). \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que

$$L_Z(f) = L_X g_0 - d(L_X f)(Y) = (L_X L_Y - L_Y L_X)f = [X, Y]f$$

Nous venons de démontrer la première partie de la proposition.

Supposons maintenant que ϕ_s et ϕ_t commutent pour tout s et t . Comme le flot de $(\phi_s)^*(Y)$ est $\{\phi_s \circ \psi_t \circ \phi_{-s}\}_{t \in \mathbb{R}} = \{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, nous en déduisons que $(\phi_s)^*(Y) = Y$. Donc d'après la première partie de la proposition $[X, Y] = 0$.

Supposons maintenant que $[X, Y] = 0$. Alors comme $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$,

$$\left. \frac{d}{ds} \phi_s^*(Y) \right|_{s=t} = \phi_t \left. \frac{d}{ds} \phi_s^*(Y) \right|_{s=0} = 0.$$

Nous en déduisons que pour tout t , les deux champs de vecteurs $\phi_t^*(Y)$ et Y sont égaux, leurs flots coïncident donc. Autrement dit

$$\{\phi_s \circ \psi_t \circ \phi_{-s}\}_{t \in \mathbb{R}} = \{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Ainsi ϕ_s et ϕ_t commutent pour tout s et t . $\square$

37.3 Calcul de Lie-Cartan

Nous avons vu agir les champ de vecteurs sur les fonctions par la formule

$$L_X f = \left. \frac{d}{ds} f \circ \phi_s \right|_{s=0},$$

lorsque ϕ_s est le flot de X . Nous généralisons cette action aux formes par la définition.

Définition 37.3.1. [DÉRIVÉE DE LIE D'UNE FORME] Soit X un champ de vecteur de flot $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ et ω une forme différentielle, alors la dérivée de Lie de ω par rapport au champ de vecteur X est la forme différentielle

$$L_X \omega = \left. \frac{d}{ds} \phi_s^*(\omega) \right|_{s=0}.$$

37.3.1 La formule de Lie-Cartan

La formule suivante est fondamentale, elle généralise le lemme 34.2.1

Lemme 37.3.2. [FORMULE DE LIE-CARTAN] Soit ω une forme différentielle et X un champ de vecteur. Alors

$$L_X \omega = d\iota_X \omega + \iota_X d\omega.$$

DÉMONSTRATION : Lorsque la variété M est de la forme $M = N \times \mathbb{R}$, et $X = \partial_t$, la formule de Lie-Cartan est exactement la formule du lemme 34.2.1.

Supposons maintenant que X est un champ de vecteur quelconque sur une variété M de flot $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Considérons l'application ϕ de $M \times \mathbb{R}$ dans M donnée par $\phi(t, x) = \phi_t(x)$. Cette application est une submersion.

Nous remarquons que $T_{(m,t)}\phi(\partial_t) = X(\phi_t(m))$. Nous en déduisons que, si ω une forme différentielle, a lors

$$\phi^*(\iota_X \omega) = \iota_{\partial_t} \phi^*(\omega).$$

Notons enfin $j_s(m) = (m, s)$. Alors, comme $\phi_s = \phi \circ j_s$, nous en déduisons en appliquant la formule de Lie Cartan en appliquant le lemme 34.2.1 appliqué à $\phi^*(\omega)$. $\square$

EXERCICE : Nous proposons en exercice une approche plus conceptuelle de la formule de Lie-Cartan qui n'utilise pas le cas particulier du cylindre $M \times [0, 1]$. La démonstration se fait par récurrence sur le degré de la forme α

1. Montrez la formule pour $k = 0$.
2. Supposez vraie la formule pour toute les formes de degré k , montrez la formule de Lie-Cartan pour les formes de degré $k + 1$ qui s'écrivent $f d\alpha$ avec f une fonction et α de degré k . On utilisera la propriété fondamentale de la différentielle extérieure : $d(f d\alpha) = df \wedge d\alpha$.
3. Conclure.

37.3.2 Un formulaire

La proposition suivante suit des définitions.

Proposition 37.3.3. *Nous avons*

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta, \quad (37.5)$$

$$L_{[X,Y]}\beta = L_X(L_Y\beta) - L_Y(L_X\beta). \quad (37.6)$$

Si ω est une forme de degré 1

$$d\omega(X, Y) = (L_X\omega)(Y) - (L_Y\omega)(X) - \omega[X, Y]. \quad (37.7)$$

Si $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est une famille C^∞ à un paramètre de difféomorphismes et si $X(m) = \left. \frac{d}{dt}\phi_t(m) \right|_{t=0}$, alors pour toute forme différentielle ω

$$\left. \frac{d}{dt}\phi_t^*\omega \right|_{t=0} = L_X\omega.$$

Ces propriétés sont laissées en exercice. Pour la dernière, on la démontrera d'abord pour les fonctions puis on utilisera le produit extérieur pour la généraliser.

37.4 Applications : construction de difféomorphismes

Dans les deux applications qui suivent, nous allons utiliser les champs de vecteurs pour construire des difféomorphismes.

37.4.1 Transitivité du groupe des difféomorphismes

Nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème 88. *Soit M une variété connexe et x et y deux points de M , il existe alors un difféomorphisme ϕ tel que $\phi(x) = y$.*

DÉMONSTRATION : Supposons tout d'abord que x et y sont dans le domaine d'une carte (U, ϕ) telle que $\phi(U)$ est une boule, soit $x_0 = \phi(x)$ et $y_0 = \phi(y)$. Nous pouvons alors construire un champ de vecteur $\hat{X}$ sur $\phi(U)$ défini par

$$\hat{X}(z) = \chi(z) \cdot (y_0 - x_0),$$

où χ est une fonction à support dans $\phi(U)$ qui vaut 1 au voisinage du segment $[x_0, y_0]$. La courbe $c : t \rightarrow ty_0 + (1-t)x_0$ alors une orbite de ce champ de vecteur. En particulier si $\{\hat{\psi}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot de $\hat{X}$, alors $\hat{\psi}_1(x_0) = y_0$.

Comme $\hat{X}$ est à support compact dans $\phi(U)$, il existe un champ de vecteur X , de flot $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ à support dans U tel que $\phi_*(X) = \hat{X}$. En particulier, $\phi_1(x) = y$. Le difféomorphisme ϕ_1 envoie donc x sur y .

Fixons x un point de M et soit O_x l'ensemble des points y de M tel qu'il existe un difféomorphisme envoyant x sur y .

Le paragraphe précédent entraîne que O_x est ouvert. En effet, si $y \in O_x$ et $\phi_0(x) = y$ il existe un voisinage U de y , tel que pour tout z de U , il existe un difféomorphisme ϕ tel que $\phi(y) = z$, dès lors $\phi \circ \phi_0(x) = z$. Ainsi $U \subset O_x$ et O_x est ouvert.

De même, O_x est fermé. Soit y un point de l'adhérence de O_x et U le voisinage de y tel que pour tout z de U , il existe un difféomorphisme ϕ tel que $\phi(y) = z$. Soit alors $z \in O_x \cap U$. Il existe donc ϕ_0 tel que $\phi_0(x) = z$. En particulier, $\phi^{-1} \circ \phi_0(x) = y$. Ainsi $y \in O_x$ et O_x est fermé. Par connexité, il existe $O_x = M$. $\square$

On peut montrer de la même manière que pour tout n si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont deux n -uplets de points distincts de M , il existe un difféomorphisme ϕ tel que pour tout i , $\phi(x_i) = y_i$.

37.4.2 Le lemme de Moser

Le lemme de Moser montre que le groupe des difféomorphismes est transitif sur les formes volumes de même volume.

Lemme 37.4.1. *Soit M une variété connexe, compacte orientée. Soit α_0 et α_1 deux formes volumes telles que*

$$\int_M \alpha_0 = \int_M \alpha_1.$$

Alors, il existe un difféomorphisme ϕ tel que

$$\phi^*(\alpha_1) = \alpha_0.$$

DÉMONSTRATION : Nous déduisons des hypothèses que la forme $\alpha_0 - \alpha_1$ est exacte. Soit donc ω telle que $d\omega = \alpha_0 - \alpha_1$. Considérons par ailleurs la forme $\alpha_t = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_0$. Soit X_t le champ de vecteurs dépendant du temps et défini par $\omega = \iota_{X_t}\alpha_t$. Par la formule de Lie-Cartan

$$L_{X_t}\alpha_t = \alpha_0 - \alpha_1.$$

Soit $\{\phi_t^s\}_{s,t \in \mathbb{R}}$ le flot de X_t . Nous savons que

$$\phi_t^u \circ \phi_u^s = \phi_t^s,$$

rappelons également que

$$\left. \frac{d}{dt}(\phi_t^s)(m) \right|_{t=s} = X_s(m),$$

nous obtenons donc

$$\left. \frac{d}{dt}(\phi_t^0)^*\alpha_t \right|_{t=s} = (\phi_s^0)^* \left. \frac{d}{dt}(\phi_t^s)^*\alpha_t \right|_{t=s} \quad (37.8)$$

$$= (\phi_s^0)^*(L_{X_s}\omega_s + \alpha_1 - \alpha_0) \quad (37.9)$$

$$= 0. \quad (37.10)$$

Nous en déduisons que $(\phi_t^0)^*\alpha_t$ est indépendant du temps et en particulier

$$(\phi_1^0)^*\alpha_1 = \alpha_0.$$

$\square$

Part V

Courbes complexes

Chapter 38

Courbes complexes

38.1 Courbes complexes

38.1.1 Courbes complexes

On peut définir la notion de carte, d'atlas et de variétés *analytique complexe* complexe en supposant que les cartes sont à valeurs dans des espaces vectoriels complexes, remplaçant dans les définitions le mot C^r par le mot holomorphe. La dimension d'une variété analytique complexe est alors la dimension complexe de l'image des cartes. Un difféomorphisme holomorphe est appelé un *biholomorphisme* et son inverse est aussi holomorphe.

Nous nous intéresserons tout particulier au cas suivant.

Définition 38.1.1. *Une courbe complexe est une variété analytique complexe de dimension 1. Sa structure complexe est donnée par un atlas $\{(U_i, X_i)\}$ où les X_i sont des coordonnées à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que les changements de cartes sont holomorphes.*

On définit alors de la même manière la notion d'application holomorphe entre variétés analytiques complexes, de sous variétés analytiques.

Le revêtement universel d'une courbe complexe – ou d'une variété analytique complexe – est également une courbe complexe – ou une variété analytique complexe.

On ne peut plus par contre parler de partition de l'unité dans le monde des fonctions holomorphes. Remarquons par contre que deux courbes complexes peuvent être difféomorphes sans être équivalentes dans le monde analytique complexe.

En particulier, nous ne savons pas démontrer l'analogue du théorème de Whitney et ceci pour une bonne raison :

Proposition 38.1.2. *Toute fonction holomorphe définie sur une courbe analytique complexe compacte est constante. En particulier, il n'existe pas d'immersion holomorphe d'une courbe compacte dans $\mathbb{C}^n$.*

Par contre de nombreuses variétés analytiques complexes – et en particulier toutes les courbes sont biholomorphes à des sous-variétés d'un espace projectif.

Cette proposition est une conséquence immédiate – car toute fonction continue sur un compact admet un maximum – du lemme suivant:

Lemme 38.1.3. Principe du maximum. Soit X une courbe complexe, soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non localement constante. Alors la fonction $|f| : x \mapsto |f(x)|$ n'admet pas de maximum local.

DÉMONSTRATION : C'est un énoncé local, donc on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Supposons d'abord $n = 1$. Si f n'est pas constante au voisinage de 0, f possède un développement limité de la forme $f(x) = a_k x^k + o(x^k)$ avec $a_k \neq 0$. Il existe alors une fonction holomorphe ϕ définie au voisinage de 0 telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) \neq 0$, telle que $f(x) = \phi(x)^k$ au voisinage de 0. Autrement dit, quitte à changer de coordonnée, $f(x) = x^k$. On constate que $x \mapsto |x|^k$ n'admet pas un maximum local en 0.

Dans le cas général, on raisonne par l'absurde. Supposons que $|f|$ admette un maximum local en 0. Alors la restriction de f à toute droite complexe passant par l'origine est constante, donc f est constante au voisinage de 0. $\square$

38.2 Courbes complexes simplement connexes

38.2.1 La droite projective complexe

Le premier exemple de courbe complexe est la droite projective complexe. Un polynôme, ou une fraction rationnelle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définit naturellement une application holomorphe de $\mathbb{CP}^1$ dans $\mathbb{CP}^1$.

On remarque que par construction le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ agit par biholomorphisme sur $\mathbb{CP}^1$.

38.2.2 Le disque, le demi plan supérieur et ses quotients

Le *demi-plan supérieur*, noté $\mathbb{H}^2$, est l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}.$$

On remarque tout d'abord que $\mathbb{H}^2$ est biholomorphe au disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$

Nous avons alors

Proposition 38.2.1. Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit par homographie en préservant $\mathbb{H}^2$. De plus un élément A différent de l'identité de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ a un point fixe sur $\mathbb{H}^2$ si et seulement si $|\mathrm{trace}(A)| < 2$. De plus $A'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$.

De nombreux sous-groupes de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ vont agir proprement discontinuement sans point fixe sur $\mathbb{H}^2$. Nous allons nous contenter d'un exemple.

Soit

$$\Gamma_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} m & 2p \\ 2n & q \end{pmatrix} \mid m, n, p, q \in \mathbb{Z}, \det(A) = 1 \right\}.$$

Proposition 38.2.2. Le groupe Γ_2 agit proprement discontinuement sans point fixe sur $\mathbb{H}^2$.

DÉMONSTRATION : Nous nous contentons de montrer que Γ_2 agit sans point fixes sur $\mathbb{H}^2$. En considérant la trace, nous sommes ramenés au cas suivants

- soit $m = -q$, mais alors $\det(A) = -m^2 - 4pn = 1$ or -1 n'est pas un carré modulo 4. Les carrés modulo 4 sont en effet $1 = 1^2 = 3^2$ et $0 = 2^2 = 0^2$.
- soit $m = -q + 1$, mais alors $\det(A) = -m^2 + m - 4pn = 1$, or modulo 4, les valeurs de $m^2 - m$ sont successivement 0, 0, 2, 2.

Nous voyons donc que Γ_2 agit sans point fixes. □

Nous avons alors

Proposition 38.2.3. *La courbe complexe $\mathbb{H}^2/\Gamma_2$ est biholomorphe à $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.*

On considère la fonction

$$f(z) = \sum_{A \in \Gamma_2} A'(z)$$

38.2.3 Le théorème d'uniformisation

Le théorème suivant – que nous ne démontrerons pas – est l'un des résultats fondamentaux des mathématiques

Théorème 89. [UNIFORMISATION DE RIEMANN] *Toute courbe complexe simplement connexe est biholomorphe à la droite projective $\mathbb{CP}^1$, à $\mathbb{C}$ tout entier ou au disque $\mathbb{D}$.*

Par exemple, le revêtement universel de $\mathbb{CP}^1$ auquel on a oté deux points est biholomorphe à $\mathbb{C}$ (pourquoi ?) ; le revêtement universel de $\mathbb{CP}^1$ auquel on a oté trois points est biholomorphe à $\mathbb{D}$ (pourquoi ?). Nous nous contenterons de remarquer

Proposition 38.2.4. *Il n'existe pas de difféomorphisme holomorphe entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$. Autrement dit $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ ne sont pas holomorphiquement équivalents.*

DÉMONSTRATION : En effet, toute application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{D}$ est bornée et en particulier constante. □

38.3 Premières applications

38.3.1 Le théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 90. [D'ALEMBERT] *Tout polynôme à coefficients complexes possède au moins une racine.*

DÉMONSTRATION : En effet un polynôme définit une application de $\mathbb{CP}^1$ dans lui-même, le théorème suit donc de la proposition que nous allons énoncer □

Proposition 38.3.1. *Toute application holomorphe d'une courbe complexe compacte dans $\mathbb{CP}^1$ est constante ou surjective.*

DÉMONSTRATION : Supposons en effet que l'application f n'est pas surjective et évite un point. Envoyons ce point à l'infini, alors f donne naissance à une fonction holomorphe qui est donc constante – par application du principe du maximum. □

38.3.2 Le petit théorème de Picard

Ce théorème améliore le théorème de Liouville qui dit que toute fonction entière — c'est-à-dire holomorphe et définie sur $\mathbb{C}$ — est constante.

Théorème 91. *Toute fonction entière qui évite deux valeurs est constante.*

DÉMONSTRATION : En effet, comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, toute telle fonction f se relève en une fonction g à valeur dans le revêtement universel de $\mathbb{CP}^1$ moins trois points. Nous avons vu que ce revêtement est $\mathbb{D} : p \rightarrow \mathbb{CP}^1 \setminus \{a, b, c\}$. Comme p est un biholomorphisme local, nous en déduisons que g est holomorphe. Ainsi g est une fonction entière bornée, elle est donc constante. $\square$

38.4 Courbes complexes planes

Définition 38.4.1. *Une courbe complexe plane lisse est une sous-variété X de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ définie par*

$$X = \{[z : w : t] \mid P(z, w, t) = 0\},$$

où P est un polynôme homogène à trois variables tel que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial t}\right).$$

ne s'annule pas le long de X .

Proposition 38.4.2. *Une courbe complexe plane définie par P est une courbe complexe. Son espace tangent en $[z : w : t]$ coïncide avec celui de l'espace tangent à la droite projective dont les coordonnées sont*

$$\left[\frac{\partial P}{\partial z} : \frac{\partial P}{\partial w} : \frac{\partial P}{\partial t}\right].$$

On dit que cette droite projective est la droite projective tangente en $[z : w : t]$.

38.5 Courbes planes cubiques

Toute cubique peut s'écrire sous la forme

$$y^2z = x^3 + pxz^2 + qz^3,$$

c'est à dire dans la carte affine $z = 1$, nous avons

$$y^2 = x^3 + px + q.$$

EXERCICE : A quelles conditions la cubique

$$y^2z = x^3 + pxz^2 + qz^3,$$

est-elle lisse ?

Les dérivées partielles s'annulent si $yz = 0$, $3x^2 + pz^2 = 0$, $y^2 = 2pxz + 3qz^2$. Un bref calcul montre que la cubique n'est pas lisse si et seulement si $27q^2 + 4p^3 = 0$.

EXERCICE : Montrez que le nombre d'intersection d'une cubique avec une droite est au plus petit ou égal à trois avec égalité si la droite n'est pas tangente, que le nombre d'intersection d'une cubique avec une droite tangente est plus petit ou égal à deux, qu'il existe un seul point sur la cubique dont la droite tangente a un seul point avec la cubique.

On se place dans la carte affine $z = 1$. Traitons suivant les cas,

- La droite à l'infini $z = 0$ intersecte la cubique en exactement un point $[0 : 1 : 0]$ et qu'elle est tangente en ce point.
- Les droites $x = az$, intersecte la cubique en $[0 : 1 : 0]$ et $[a : \pm y_0 : 1]$ où y_0 est solution de $y^2 = a^3 + pa^2 + q$. On a une racine double de cette équation si et seulement si la droite est tangente.
- Les droite d'équations $y = ax + b$

Corollaire 38.5.1. *Une cubique plane lisse est connexe.*

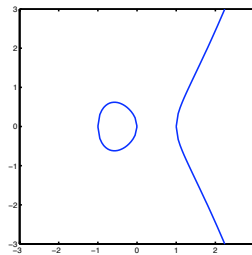
DÉMONSTRATION : On suppose en effet qu'une courbe plane a plusieurs composantes connexes. Une composante connexe B qui ne contient pas le point $[0 : 1 : 0]$ n'intersecte pas la droite à l'infini. En particulier, elle est incluse dans l'ouvert de la carte affine $z = 1$. Or toute application holomorphe d'une variété analytique compacte – ici B – dans $\mathbb{C}^2$ est constante. Nous obtenons ainsi que B est réduit à un point et la contradiction.

La connexité d'une courbe plane lisse est un fait général.

38.5.1 Connexité

EXERCICE : Tracer la courbe réelle d'équation $y^2 = x(x-1)(x+1)$.

Solution.



On constate qu'elle n'est pas connexe. En revanche, les solutions complexes de l'équation forment un ensemble connexe. C'est un fait général. Donnons d'abord une preuve sophistiquée, qui repose sur le lemme suivant.

Proposition 38.5.2. *Une cubique lisse $\mathcal{T}$ est connexe.*

DÉMONSTRATION : Par l'absurde. Supposons que $\mathcal{T}$ n'est pas connexe. Comme $\mathcal{T}$ est localement connexe, les composantes connexes de $\mathcal{T}$ sont ouvertes. Le complémentaire d'une composante, réunion de composantes connexes, est ouvert. Donc les composantes connexes de $\mathcal{T}$ sont des variétés complexes compactes de dimension 1. Soit Y une composante connexe de $\mathcal{T}$ qui ne contient pas i . Alors la projection sur le premier facteur, $(x, y) \mapsto x$ en coordonnées affines, est une fonction holomorphe sur Y , et $|x|$ atteint son maximum sur Y , donc x est constante sur Y . Autrement dit, Y est contenue dans une droite verticale. Or l'intersection de $\mathcal{T}$ avec toute droite verticale a au plus deux points, contradiction. $\square$

Nous pouvons généraliser le théorème obtenu pour les quadriques

Théorème 92. *L'ensemble des droites projectives tangentes à une courbe complexe est une courbe complexe de l'espace projectif dual.*

Chapter 39

Formes abéliennes

39.1 Definition

39.1.1 Périodes

39.2 Homologie

39.2.1 Le théorème de Hurewicz

39.2.2 Le genre d'une courbe

39.2.3 La formule de Riemann-Hurwitz

39.2.4 Le genre d'une courbe plane

39.3 Le groupe fondamental d'une courbe plane

Théorème 93. *Une courbe plane simplement connexe est une quadrique.*

39.4 Retour sur les cubiques

39.5 1-formes différentielles

39.5.1 Rappels

Définition 39.5.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une 1-forme différentielle sur U est une application qui à chaque $x \in U$ associe une forme linéaire $\omega(x)$ sur $\mathbb{R}^n$. Si la matrice de $\omega(x)$ est $(a_1(x) \cdots a_n(x))$, on note $d\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$. Si les fonctions a_i , au lieu d'être à valeurs réelles, sont à valeurs complexes, on parle de 1-forme différentielle complexe sur U .

EXEMPLE : Si u est une fonction différentiable sur U , sa différentielle $du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$ est une 1-forme différentielle sur U (réelle ou complexe suivant que u est à valeurs réelles ou complexes).

Définition 39.5.2. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^q$. Soit $f : V \rightarrow U$ une application différentiable, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Alors f tire en arrière les formes différentielles de U vers V ,

$$f^*\omega(y) = \omega(f(y)) \circ d_y f = \sum_{i=1}^n a_i \circ f df_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q a_i \circ f \frac{\partial f_i}{\partial y_j} dy_j.$$

Proposition 39.5.3. Si u est une fonction sur U , on note $f^*u = u \circ f$. Alors

1. $d(f^*u) = f^*du$,
2. $f^*u\omega = f^*u f^*\omega$.

Cela rend le calcul de $f^*\omega$ entièrement mécanique.

EXEMPLE : Soit $\omega = x dy - y dx$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées polaires, $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Alors $f^*\omega = r^2 d\theta$.

En effet, $f^*x = r \cos \theta$, $f^*dx = d(f^*x) = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$, $f^*y = r \sin \theta$, $f^*dy = d(f^*y) = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$, d'où

$$\begin{aligned} f^*\omega &= r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) - r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \\ &= r^2 d\theta. \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{C}^n$, il y a des notations commodes.

Notation. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On note z_j les coordonnées complexes sur U , $x_j = \Re(z_j)$ et $y_j = \Im(z_j)$. On note $dz_j = dx_j + idy_j$ et $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$. Toute 1-forme différentielle à valeurs complexes s'écrit donc uniquement $\sum_{j=1}^n a_j dz_j + a_{\bar{j}} d\bar{z}_j$.

Définition 39.5.4. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Une 1-forme différentielle complexe sur U est dite holomorphe si elle s'écrit $\sum_{j=1}^n a_j dz_j$, où les fonctions a_j sont holomorphes.

EXEMPLE : Si f est une fonction holomorphe sur U , alors $ddf = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$ est une 1-forme holomorphe.

REMARQUES : Si $f : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, est une application holomorphe, et ω une 1-forme holomorphe, alors

$$f^*\omega = \sum_{i=1}^n a_i \circ f df_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q a_i \circ f \frac{\partial f_i}{\partial z_j} dz_j$$

est une 1-forme holomorphe.

Définition 39.5.5. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une 1-forme différentielle ω sur U est exacte s'il existe une fonction u sur U telle que $\omega = du$. Une condition nécessaire est que ω soit fermée, i.e. que $d\omega = 0$, où, si $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$,

$$d\omega = \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i.$$

Ces deux notions sont préservées lorsqu'on tire les formes en arrière.

Définition 39.5.6. 1. Soit $\omega = a(t) dt$ une 1-forme différentielle sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. L'intégrale de ω sur $[a, b]$ est

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b a(t) dt.$$

2. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une courbe différentiable. L'intégrale de ω sur γ est par définition

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \gamma^* \omega.$$

Définition 39.5.7. Comme on sait transporter les 1-formes différentielles par les difféomorphismes, on peut parler de 1-formes différentielles sur les variétés, de formes exactes, fermées, d'intégrales curvilignes. Dans le cas des variété complexes, on peut même parler de 1-formes holomorphes.

39.5.2 Motivation

Comment calculer une primitive de la fonction $d\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$? Il s'agit d'intégrer la 1-forme différentielle dx/y le long d'arcs de la courbe d'équation $y^2 = ax^2 + bx + c$. Cette courbe C est une conique affine non dégénérée. On utilise un paramétrage unicursal de cette conique. C'est une application $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow C$ dont les composantes sont des fonctions rationnelles, donc $f^* \frac{dx}{y} = R(t) dt$ où R est une fraction rationnelle. Par conséquent, la primitive se calcule (décomposition en éléments simples). Le résultat s'exprime rationnellement en fonction de t et de $\log(t)$ si les pôles de R sont réels (sinon il faut ajouter $\arctan(t)$), donc c'est une expression rationnelle en x et en $\log$ d'une fraction rationnelle en x et en $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

EXEMPLE : Intégration de $d\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Dans ce cas, C est le cercle unité. Le paramétrage unicursal d'origine $A = (-1, 0)$ est $df : t \mapsto (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$. Inversement, comme t est la pente de la droite passant par A et (x, y) , $t = \frac{y}{x+1}$. Alors

$$f^* \frac{dx}{y} = \frac{\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2}{1+t^2} dt = d(2 \arctan(t)) = d(2 \arctan(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1})).$$

REMARQUES : La méthode s'étend à toute fonction rationnelle en x et en $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Comment intégrer $d\frac{1}{\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}}$?

La courbe T d'équation $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ n'est pas une conique. On va voir qu'elle ne possède pas de paramétrage rationnel par la droite projective. Si c'était le cas, l'ensemble des solutions complexes de l'équation (une courbe algébrique complexe) serait paramétrable par la droite projective complexe. Or on va voir que T est difféomorphe à un tore.

39.5.3 Courbes algébriques planes projectives

Comme pour les coniques, les courbes algébriques affines sont les points à distance finie de courbes algébriques projectives.

Définition 39.5.8. Une courbe algébrique plane projective est $\mathcal{T} = \mathbb{P}(Z)$ où Z est le lieu des zéros d'un polynôme homogène en 3 variables.

La complétion projective d'une courbe algébrique affine s'obtient en rendant homogène l'équation. Pour la courbe affine T d'équation affine $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, l'équation homogène est $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - y^2z = 0$. Les points à l'infini de T sont les points de coordonnées homogènes $[x : y : 0]$ tels que $ax^3 = 0$, il y a donc un seul point, $i = [0 : 1 : 0]$, le point de fuite de l'axe des y .

EXERCICE : Si le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ n'a que des racines simples, la cubique projective $\mathcal{T}$ d'équation $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - y^2z = 0$ est une sous-variété complexe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Solution. Dans la carte affine ϕ_3 , il s'agit d'étudier l'équation affine, dont la différentielle est $(3ax^2 + 2bx + c)dx - 2ydy$. Celle-ci s'annule aux zéros communs du polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ et de sa dérivée, i.e. aux racines multiples de ce polynôme.

Pour étudier l'unique point à l'infini $i = [0 : 1 : 0]$ de $\mathcal{T}$, on utilise la carte affine ϕ_2 . Dans cette carte, l'équation affine de $\phi_2(\mathcal{T})$ devient $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - z = 0$, dont la différentielle est $(3ax^2 + 2bxz + cz^2)dx + (bx^2 + 2cxz + 3dz^2 - 1)dz$. Au point $\phi_2([0 : 1 : 0]) = (0, 0)$, la différentielle est $-dz$, elle est non nulle. On conclut que $\mathcal{T}$ est une sous-variété complexe. $\square$

Convention. On suppose désormais que le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ n'a que des racines simples.

On peut bâtir une preuve plus élémentaire en remarquant que $\mathcal{T}$ coupe toute droite verticale, et que les points d'intersection varient continûment. Si les points d'intersection restaient distincts, cela consisterait à dire que la projection $(x, y) \mapsto x$ est un revêtement. Ce n'est pas tout à fait vrai, ce qui complique la preuve. Néanmoins, le fait que cette application est presque un revêtement va être utile dans le paragraphe suivant.

39.5.4 Revêtement ramifié

On va calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}$ était un revêtement de degré d de la droite projective, on pourrait utiliser la formule $\chi(\mathcal{T}) = d\chi(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Un tel revêtement n'existe pas. À la place, on utilise la projection de centre $i = [0 : 1 : 0]$, de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sur la droite projective $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0$, dont on note ∞ le point de fuite. En coordonnées homogènes, elle s'écrit $[x : y : z] \mapsto [x : 0 : z]$ (sa restriction au plan affine est simplement la projection sur l'axe des x , $(x, y) \mapsto x$). Cette application est un revêtement sauf en quelques points, dits *de ramification*, qui nécessiteront un traitement spécial.

EXERCICE : La restriction à $\mathcal{T} \setminus \{i\}$ de la projection de centre i sur $\mathcal{D}$ se prolonge en une application holomorphe $p : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$. C'est une submersion au-dessus de $\mathcal{D}$ privée de ses 3 points d'intersection r, r', r'' avec $\mathcal{T}$ et du point de fuite. La restriction de p à $\mathcal{T} \setminus \{r, r', r'', i\}$ est un revêtement à 2 feuillets.

Solution. Au voisinage de i , on peut paramétrer $\mathcal{T}$ par $x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$, où ζ est holomorphe au voisinage de 0, $\zeta(0) = 0$, d'où $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n = x\eta(x)$ où η est holomorphe

au voisinage de 0. On utilise la carte $\phi_2 : [x : y : z] \mapsto (x/y, z/y)$. Au voisinage de ∞ dans $\mathcal{D}$, on utilise la carte $\psi_2 : [x : z] \mapsto z/x$. Dans ces cartes, la projection centrale s'écrit $(x, z) \mapsto [x : 1 : z] \mapsto [x : 0 : z] \mapsto z/x$, donc la restriction de cette projection à la courbe, dans le paramétrage choisi, s'écrit $x \mapsto \zeta(x)/x = \eta(x)$, qui est holomorphe. De l'équation $\zeta = ax^3 + bx^2\zeta + cx\zeta^2 + d\zeta^3$, on tire $x\eta = ax^3 + bx^3\eta + cx^3\eta^2 + dx^3\eta^3$, puis $\eta = x^2(a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3)$, qui montre que $\eta'(0) = 0$, i.e. p n'est pas une submersion en i .

Si $q = (x, y) \in T$ est à distance finie, p n'est pas une submersion en q lorsque la tangente à T en q est verticale, i.e. quand la différentielle de l'équation affine de T est proportionnelle à dx . Cela se produit lorsque $y = 0$, i.e. aux trois points r, r' et r'' de T dont les abscisses sont les racines du polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Soit $q = (x, y) \in T$ un point où p est une submersion. Alors il existe des voisinages U de q dans T et V de $x = p(q)$ dans $\mathcal{D}$ tels que $p|_U : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme, d'application réciproque s . Alors $p^{-1}(V) = s(V) \cup \sigma \circ s(V)$, où $\sigma(x, y) = (x, -y)$. Ceci montre que p est un revêtement en dehors des quatre points r, r', r'' et ∞ . $\square$

Lemme 39.5.9. *Il existe des voisinages disjoints $V_1, \dots, V_4$ des quatre points r, r', r'' et ∞ de $\mathcal{D}$ et des cartes $\phi_i : p^{-1}(V_i) \rightarrow \mathbb{C}$ et $\psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tout $q \in p^{-1}(V_i)$, $\psi_i \circ p(q) = \phi_i(q)^2$. Autrement dit, à changement de coordonnées holomorphe près, p se confond avec l'application $z \mapsto z^2$ au voisinage des points de ramification.*

DÉMONSTRATION : Au voisinage du point i , on utilise le paramétrage $x \mapsto (x, x\eta(x))$. On peut écrire $p = \eta(x) = \phi(x)^2$ où $\phi = \sqrt{a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3}$ est holomorphe au voisinage de 0, $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) \neq 0$, donc ϕ est une carte.

Au voisinage de $(r, 0)$, on peut paramétrer T par $y \mapsto (r + \xi(y), y)$, où ξ est holomorphe au voisinage de 0 et satisfait $\xi(0) = 0$. De l'équation $y^2 = a(r + \xi)^3 + b(r + \xi)^2 + c(r + \xi) + d$, on tire $y^2 = a(3r^2\xi + 3r\xi^2 + \xi^3) + b(2r\xi + \xi^2) + c\xi$, soit $(3ar^2 + 2br + c)\xi = y^2 - 3ar\xi^2 - a\xi^3 - b\xi^2$. Cela montre que $\xi'(0) = 0$, donc on peut écrire $\xi(y) = y^2\chi(y)$, où χ est holomorphe au voisinage de 0. Alors $\chi(y) = \frac{1}{3ar^2 + 2br + c}(1 - (3ar + b)y^2\chi(y)^2 - ay^4\chi(y)^3)$, donc $p(x, y) = x = \xi(y)$ peut s'écrire $\phi(y)^2$ où ϕ est holomorphe au voisinage de 0, $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) \neq 0$. Il en est de même au voisinage de r' et r'' . $\square$

39.5.5 Calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré

Soit C une décomposition cellulaire lisse de $\mathcal{D}$ telle que

- les points r, r', r'' et ∞ sont des sommets de C ;
- toutes les faces de C contenant l'un de ces points sont contenues dans la réunion des ouverts V_i .

Chaque élément (sommet, arête, face) de C qui ne contient pas les points de ramification se relève en 2 éléments analogues, disjoints, dans $\mathcal{T}$. En contemplant le comportement de l'application $z \mapsto z^2$, on voit que chaque arête ou face contenant un point de ramification se relève en 2 éléments qui se touchent en un sommet. Les points de ramification eux-mêmes se relèvent en un seul sommet. On obtient une décomposition cellulaire lisse $\hat{C}$ de $\mathcal{T}$, telle que

$$\hat{S} = 2S - 4, \quad \hat{A} = 2A, \quad \hat{F} = 2F,$$

donc $\chi(\mathcal{T}) = 2\chi(\mathcal{D}) - 4 = 4 - 4 = 0$, ce qui prouve que $\mathcal{T}$ est un tore.

On a illustré sur un exemple un fait général. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ entre variétés réelles de dimension 2 est un *revêtement ramifié* si, pour tout point $x \in X$, il existe des cartes $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ au voisinage de x et $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ au voisinage de $f(x)$ et un entier $k(x)$ tels que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^{k(x)}$. Bien sûr, $k = 1$ sauf pour un ensemble discret de points de X appelés *points de ramification*. L'entier $k(x)$ est la *multiplicité* de x . Si X et Y sont compactes, le *degré* d de f , nombre de points d'une fibre non ramifiée, est constant. La *formule de Riemann-Hurwitz* donne $\chi(X) = d\chi(Y) - \sum_{x \in X} k(x) - 1$.

39.5.6 Différentiabilité de dx/y

EXERCICE : Vérifier que la 1-forme différentielle $\frac{dx}{y}$ se prolonge en une 1-forme différentielle holomorphe sur $\mathcal{T}$.

Solution. Au voisinage de r , on utilise le paramétrage $f : y \mapsto [r + \xi(y) : y : 1]$, où $\xi(y) = y^2\chi(y)$. Alors $f^*\frac{dx}{y} = \frac{\xi'(y)}{y} dy = (2\chi + y\chi'(y)) dy$ est holomorphe au voisinage de 0, ce qui prouve que $\frac{dx}{y}$ est holomorphe au voisinage de r . C'est pareil en r' ou r'' .

Au voisinage de i , on utilise le paramétrage $g : x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$, où $\zeta(x) = x\eta(x)$. Alors $g^*\frac{dx}{y} = dx$ est holomorphe au voisinage de 0, ce qui prouve que $\frac{dx}{y}$ est holomorphe au voisinage de i . $\square$

39.5.7 1-formes fermées et primitives

Que signifie calculer une primitive d'une 1-forme différentielle comme dx/y sur un tore ?

REMARQUES : Il n'existe pas de fonction f sur $\mathcal{T}$ telle que $df = dx/y$.

En effet, comme df est holomorphe, f est une fonction holomorphe. Comme $\mathcal{T}$ est compact, $|f|$ atteint son maximum. D'après le principe du maximum (lemme 38.1.3), f est constante, $df = 0$, contradiction. $\square$

Pourtant, dx/y admet des primitives localement. Par exemple, au voisinage de i , la carte g^{-1} , réciproque du paramétrage $g : x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$, satisfait $d(g^{-1}) = \frac{dx}{y}$. L'obstacle pour étendre une primitive locale en une primitive globale est lié au groupe fondamental.

Proposition 39.5.10. Soit X une variété connexe. Soit ω une 1-forme différentielle fermée sur X , réelle ou complexe. Il existe un plus petit revêtement connexe $p : X^\omega \rightarrow X$ tel que $p^*\omega$ soit exacte. Ce revêtement est galoisien. Son groupe d'automorphismes est commutatif et libre. Si X est compacte, il est isomorphe à $\mathbb{Z}^N$, pour un $N \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION : Soit $x_0 \in X$ un point base. On considère l'ensemble des chemins différentiables d'origine x_0 . On note $f(\gamma) = \int_\gamma \omega := \int_0^1 \gamma^* \omega$. On introduit la relation d'équivalence qui identifie deux chemins γ et γ' s'ils ont même extrémité et si de plus $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$. Comme lors de la construction du revêtement universel, on vérifie que l'espace quotient X^ω est une variété, et que la projection $p : X^\omega \rightarrow X$ qui à une classe de chemins associe leur extrémité

commune est un revêtement. La fonction f passe au quotient en une fonction différentiable sur X^ω , et, par construction, $df = p^*\omega$. Le point essentiel est que deux lacets différentiables de mêmes extrémités et homotopes sont équivalents.

Soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie de γ à γ' . Comme ω est fermée, elle admet des primitives locales. Recouvrons $F([0, 1] \times [0, 1])$ par un nombre fini d'ouverts connexes U_i telle que $\alpha|_{U_i} = df_i$. Soit $\delta > 0$ un nombre de Lebesgue du recouvrement $F^{-1}(U_i)$ (i.e. tout sous-carré de côté δ est entièrement contenu dans l'un des $F^{-1}(U_i)$). Découpons $[0, 1] \times [0, 1]$ en N^2 sous-carrés égaux, de côté $\leq \delta/2$. Soit α un chemin dans cette grille, passant successivement par les intersections $z_0, \dots, z_k$. Pour chaque $j = 1, \dots, k$, choisissons un indice i_j tel que les carrés contenant le côté $[z_{j-1}, z_j]$ soient contenus dans $F^{-1}(U_{i_j})$. Baptisons "intégrale" de ω sur α la somme $\sum_{j=1}^k f_{i_j}(z_j) - f_{i_j}(z_{j-1})$. Clairement, l'"intégrale" de ω sur tout carré de la grille vaut zéro, donc, en additionnant, l'"intégrale" de ω sur le bord de $[0, 1] \times [0, 1]$ vaut 0. Or c'est la différence entre les intégrales ordinaires de ω sur γ et γ' . Celles-ci sont donc égales.

Comme toute classe d'homotopie contient un lacet lisse, on obtient une application $h^\omega : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. C'est un homomorphisme de groupes. Soit H son noyau. Alors $X^\omega = H \div \tilde{X}$ où $\tilde{X}$ est le revêtement universel de X . Comme H est un noyau, il est distingué, et le quotient $\pi_1(X, x_0)/H$ est isomorphe à l'image de h^ω , un sous-groupe de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En particulier, le revêtement est galoisien, et son groupe d'automorphismes est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il est donc commutatif et libre. Si X est compacte, $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par un nombre fini d'éléments. Un groupe commutatif libre de type fini, c'est $\mathbb{Z}^N$. $\square$

EXEMPLE : Dans le cas où $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $d\omega = \frac{dz}{z}$, $X^\omega = \tilde{X}$ coïncide avec le revêtement universel, donné par l'exponentielle $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

En effet, X se rétracte par déformation sur le cercle unité, $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$ est engendré par le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique, le long duquel l'intégrale de dz/z est non nulle, donc l'homomorphisme $h^{dz/z} : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$ est injectif. La primitive de $\exp^* \frac{dz}{z} = dw$ est la coordonnée w sur $\mathbb{C}$.

39.5.8 Application d'Abel-Jacobi

On montre que la forme $d\frac{dx}{y}$ possède des primitives, qu'il faut voir comme des applications à valeurs dans un quotient de $\mathbb{C}$.

Proposition 39.5.11. Soit $X = \mathcal{T}$ et $d\omega = \frac{dx}{y}$. Soit γ et γ' deux générateurs de $\pi_1(\mathcal{T})$. Alors les nombres complexes $\tau = \int_\gamma \omega$ et $\tau' = \int_{\gamma'} \omega$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. En particulier, $X^\omega = \tilde{X}$ coïncide avec le revêtement universel.

DÉMONSTRATION : Par l'absurde. Supposons que $\tau' = \lambda\tau$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons la 1-forme réelle fermée $a = \Im m(\tau^{-1}\omega)$. Alors $\int_\gamma a = \int_{\gamma'} a = 0$, donc le revêtement $\mathcal{T}^a$ est trivial. Autrement dit, $a = dg$ est exacte sur $\mathcal{T}$. Soit $x \in \mathcal{T}$ un point où g atteint son maximum M . Soit f la primitive locale de $\tau^{-1}\omega$ qui vaut M en x . Alors $e^g = |e^{-if}|$ au voisinage de x . Le principe du maximum entraîne que la fonction holomorphe e^{-if} est constante au voisinage de x , contradiction. On conclut que τ et τ' sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. L'homomorphisme h^ω est injectif, donc $\mathcal{T}^\omega = \tilde{\mathcal{T}}$. $\square$

Corollaire 39.5.12. Soit Λ le sous-groupe de $\mathbb{C}$ formé des intégrales de $d\frac{dx}{y}$ sur les lacets de $\mathcal{T}$. Alors, en intégrant $d\frac{dx}{y}$, on obtient un isomorphisme de la variété complexe $\mathcal{T}$ avec le tore quotient $\Lambda \div \mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 39.5.11, l'homomorphisme $h^{dx/y}$ a pour image un sous-groupe Λ de $\mathbb{C}$ engendré par deux vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Ce groupe agit librement et proprement sur $\mathbb{C}$. Le quotient $\Lambda \div \mathbb{C}$ est naturellement un tore. La 1-forme constante dz sur $\mathbb{C}$ passe au quotient en une 1-forme holomorphe dz sur $\Lambda \div \mathbb{C}$. Notons $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{C}$ une primitive de dx/y . Alors $\tilde{f}$ passe au quotient en une application $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \div \mathbb{C}$ qui satisfait $f^*dz = dx/y$. Comme dx/y ne s'annule nulle part, f est un difféomorphisme local entre variétés compactes, donc un revêtement holomorphe. Par construction de Λ , $f_{\#} : \pi_1(\mathcal{T}) \rightarrow \pi_1(\Lambda \div \mathbb{C}) = \Lambda$ coïncide avec l'isomorphisme $h^{dx/y}$. Les revêtements étant en bijection avec les sous-groupes du groupe fondamental, f est trivial, i.e. un difféomorphisme biholomorphe. Cela prouve que $\mathcal{T}$ n'est pas seulement homéomorphe à un tore, mais biholomorphe au quotient de $\mathbb{C}$ par deux translations indépendantes. $\square$

39.5.9 Un théorème d'Abel

Les primitives f de dx/y ne sont pas des fonctions élémentaires, comme les fonctions rationnelles, le logarithme, l'exponentielle, les fonctions trigonométriques, leurs réciproques, ou les combinaisons de celles-ci. Autrement dit, on ne sait pas les calculer. Néanmoins, on sait prouver qu'elles satisfont à des identités, dont voici la plus simple.

Théorème 94. N. Abel (1826). Etant donnée une droite projective $\mathcal{L}$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, notons $p_1(\mathcal{L})$, $p_2(\mathcal{L})$ et $p_3(\mathcal{L})$ les trois points d'intersection de $\mathcal{L}$ et de T (certains sont éventuellement confondus). Soit $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \div \mathbb{C}$ une primitive de dx/y . Alors

$$f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L})) \in \Lambda \div \mathbb{C}$$

est indépendant de $\mathcal{L}$.

DÉMONSTRATION : Soit $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$ l'espace des droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. C'est une variété complexe de dimension 2. Alors l'application $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^* \rightarrow \Lambda \div \mathbb{C}$, $\mathcal{L} \mapsto f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L}))$ est holomorphe. En effet, lorsque $\mathcal{L}$ et $\mathcal{T}$ sont transverses, le théorème des fonctions implicites affirme que chacun des points $p_j(\mathcal{L})$ dépend holomorphiquement de $\mathcal{L}$. Soit $\mathcal{L}$ une droite tangente à $\mathcal{T}$ en un point distinct de i . Lorsqu'une sécante converge vers la tangente, 2 des points d'intersection convergent vers le point de tangence. En effet, par compacité, étant donné une suite de sécantes, on peut toujours extraire des sous-suites pour lesquelles les points d'intersection convergent. Les limites sont nécessairement des points d'intersection de la tangente et de la courbe, donc le point de tangence. Comme pour toutes les suites extraites, la limite est la même, il y a convergence. Pour la même raison, pour la tangente en i , les points d'intersection des sécantes voisines convergent vers i . Cela montre que l'application g est continue. Localement, g est une fonction continue, holomorphe le long d'une courbe, elle est automatiquement holomorphe partout.

Comme $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$ est simplement connexe, g possède un relèvement $\tilde{g} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^* \rightarrow \mathbb{C}$. C'est une fonction holomorphe. D'après le principe du maximum (pour les fonctions holomorphes sur des ouverts de $\mathbb{C}^2$), $\tilde{g}$ est constante, donc g est constante. $\square$

39.5.10 Structure de groupe sur la cubique

Soit $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \div \mathbb{C}$ la primitive de $\frac{dx}{y}$ qui envoie le point i de $\mathcal{T}$ sur $0 \in \Lambda \div \mathbb{C}$. Comme f est un difféomorphisme, on peut transporter par f la structure de groupe commutatif de $\Lambda \div \mathbb{C}$. Cette addition est donnée par une construction géométrique.

Corollaire 39.5.13. *Soit q, q' des points de $\mathcal{T}$. La droite qq' (la tangente à $\mathcal{T}$, si $q = q'$) recoupe $\mathcal{T}$ en un point r . Soit r' l'image de r par la symétrie $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Alors l'application $(q, q') \mapsto q \oplus q' = r'$ est une structure de groupe commutatif sur $\mathcal{T}$, et $f : (\mathcal{T}, \oplus) \rightarrow (\Lambda \div \mathbb{C}, +)$ est un isomorphisme de groupes.*

DÉMONSTRATION : Soit L_i la droite à l'infini de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Alors L_i coupe $\mathcal{T}$ en un seul point, i . Par conséquent,

$$f(p_1(\mathcal{L}_i)) + f(p_2(\mathcal{L}_i)) + f(p_3(\mathcal{L}_i)) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

D'après le théorème d'Abel, pour toute droite $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$, $f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L})) = 0$.

Soit $q \in \mathcal{T}$ un point à distance finie. La droite projective L_q passant par les points i et q recoupe $\mathcal{T}$ au point symétrique $\sigma(q)$. Par conséquent

$$f(q) + f(i) + f(\sigma(q)) = f(p_1(\mathcal{L}_q)) + f(p_2(\mathcal{L}_q)) + f(p_3(\mathcal{L}_q)) = 0,$$

donc $f(\sigma(q)) = -f(q)$.

Soit q, q' et r trois points de $\mathcal{T}$ qui sont alignés. Alors $f(q) + f(q') + f(r) = 0$. Par conséquent $f(q \oplus q') = f(r') = -f(r) = f(q) + f(q')$. Ceci montre que la loi $\oplus$ est une structure de groupe isomorphe à $\Lambda \div \mathbb{C}$. $\square$

REMARQUES : Cette structure de groupe sur une cubique est suffisamment simple à calculer pour qu'on ait proposé de remplacer, dans la méthode RSA de cryptage à clé publique, le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ par une cubique sur un corps fini.

Bibliography

- [B1] M. BERGER, Géométrie. Vol. 1. Actions de groupes, espaces affines et projectifs. CEDIC, Paris; Nathan Information, Paris, (1977).
- [B4] M. BERGER, Géométrie. Vol. 4. Formes quadratiques, coniques et quadriques. CEDIC, Paris; Nathan Information, Paris, (1977).
- [BG] M. BERGER, B. GOSTIAUX, Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces. Deuxième édition. Collection Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, (1992).
- [Go] C. GODBILLON, Éléments de topologie algébrique. Hermann, Paris, (1971).
- [Gr] A. GRAMAIN, Topologie des surfaces. Collection Le mathématicien. Presses Universitaires de France, Paris, (1971).
- [M] J. MILNOR, Topology from the differentiable viewpoint. The University Press of Virginia, (1965).

Chapter 40

Espace tangent

40.0.1 Espace tangent

L'espace tangent est l'endroit où vivent les vecteurs vitesse des courbes. Cela suggère la définition suivante.

Définition 40.0.1. Soit X une variété et $x \in X$. Décidons que deux courbes γ et η telles que $\gamma(0) = \eta(0) = x$ ont même vitesse en $t = 0$ si, dans une carte ϕ définie au voisinage de x , les images $\phi \circ \gamma$ et $\phi \circ \eta$ ont même vitesse en $t = 0$. L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle l'espace tangent de X en x , noté $T_x X$.

Clairement, la carte $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ identifie $T_x X$ à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Une autre carte $\psi : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ donne une identification qui diffère de la première par l'isomorphisme $d_{\phi(x)}(\psi \circ \phi^{-1})$. Par conséquent, $T_x X$ possède une structure d'espace vectoriel.

Définition 40.0.2. Une application différentiable $f : X \rightarrow Y$ entre variétés induit une application linéaire $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ appelée sa différentielle. En particulier, pour une sous-variété $Y \subset X$, $T_y Y$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $T_y X$.

Une application f est une immersion (resp. submersion) en x si et seulement si sa différentielle est injective (resp. surjective). Deux sous-variétés sont tangentes en x si et seulement si elles ont même espace tangent en x .

EXEMPLE : Soit V un espace vectoriel. Soit $f \in \text{GL}(V)$. La différentielle de f en p se calcule comme suit. On identifie $T_p \mathbb{P}(V)$ à $\text{Hom}(p, V/p)$ et $T_{f(p)} \mathbb{P}(V)$ à $\text{Hom}(f(p), V/f(p))$. Alors $d_p f$ est l'isomorphisme de $\text{Hom}(p, V/p)$ sur $\text{Hom}(f(p), V/f(p))$ induit par f .

En utilisant une carte affine, on vérifie que tout vecteur tangent w à $\mathbb{P}(V)$ en p est la vitesse en 0 d'une droite $t \mapsto \gamma(t) = \mathbb{P}(u + tv)$, u vecteur directeur de p . Montrons qu'une autre droite $t \mapsto \mathbb{P}(u' + tv')$ définit le même vecteur tangent w si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $u' = \lambda u$, $v' = \lambda v + \mu u$. Choisissons une base de V telle que $p = [0 : \dots : 0 : 1]$, avec $u = (0, \dots, 0, 1)$, $u' = (0, \dots, 0, \lambda)$. Alors

$$\phi_{n+1}(\mathbb{P}(u + tv)) = \left(\frac{tv_1}{1 + tv_{n+1}}, \dots, \frac{tv_n}{1 + tv_{n+1}} \right), \quad \phi_{n+1}(\mathbb{P}(u' + tv')) = \left(\frac{tv'_1}{\lambda + tv'_{n+1}}, \dots, \frac{tv'_n}{\lambda + tv'_{n+1}} \right),$$

dont les dérivées en $t = 0$ valent respectivement $(v_1, \dots, v_n)$ et $(v'_1, \dots, v'_n)/\lambda$. Les deux droites ont même vitesse si et seulement si $v' - \lambda v$ est un multiple de u .

Par conséquent, l'homomorphisme $p \rightarrow V/p$ qui envoie u sur $v \bmod p$ ne dépend que du vecteur tangent w et non du choix de vecteur directeur u . Alors $f \circ \gamma(t) = f(u) + tf(v)$, donc le vecteur tangent $d_p f(w)$ correspond à l'homomorphisme $f(p) \rightarrow V/f(p)$ qui envoie $f(u)$ sur $f(v)$.

40.0.2 Champs de vecteurs

Définition 40.0.3. *Un champ de vecteurs sur une variété X , c'est une application qui à chaque point x associe un vecteur tangent $\xi(x) \in T_x X$, de sorte que, dans une carte ϕ , l'application $x \mapsto d_x \phi(\xi(x))$ soit différentiable.*

Remarquer que lorsque X est de classe C^r , on peut parler de champs de vecteurs de classe C^{r-1} , mais pas mieux.

REMARQUES : Lorsque $X \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété, un champ de vecteurs est aussi une application différentiable $\xi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Il revient au même de dire que cette application est de classe C^{r-1} .

REMARQUES : Si $f : X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme, et ξ un champ de vecteurs sur X , le champ de vecteurs transporté par f sur Y est noté $f_* \xi$. On a $(f_* \xi)(y) = (d_{f^{-1}(y)} f)(\xi(f^{-1}(y)))$.

EXEMPLE : Soit V un espace vectoriel, soit $L \in \text{End}(V)$. Alors L détermine un champ de vecteurs sur $\mathbb{P}(V)$.

En effet, l'homomorphisme $L|_p : p \rightarrow V/p$ définit un vecteur tangent en p , vitesse de la droite $\mathbb{P}(u + tL(u))$, $u \in p$.

40.0.3 Flots

Définition 40.0.4. *Soit ξ un champ de vecteurs sur une variété X . Une ligne intégrale de ξ est la donnée d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et d'une courbe différentiable $\gamma : I \rightarrow X$ solution de l'équation différentielle $\gamma'(t) = \xi(\gamma(t))$, $t \in I$.*

Théorème 95. *Soit X une variété de classe C^r , $r \geq 2$, soit ξ un champ de vecteurs de classe C^k , $1 \leq k \leq r - 1$.*

1. Existence locale. *Pour tout point $x \in X$, il existe $\epsilon > 0$ et une ligne intégrale de ξ définie sur $] -\epsilon, \epsilon[$ et passant par x en $t = 0$.*
2. Unicité locale. *Si $\gamma_1 : I_1 \rightarrow X$ et $\gamma_2 : I_2 \rightarrow X$ sont deux lignes intégrales de ξ de même condition initiale x , alors $\gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}$.*
3. Solution maximale. *Pour tout point $x \in X$, il existe une unique solution maximale $\gamma_x : I_x \rightarrow X$ de condition initiale x . Si K est un compact de X et si, pour tout $t \in I_x$, $t \geq 0$, $\gamma_x(t) \in K$, alors $\sup I_x = +\infty$.*

4. Dépendance par rapport à la condition initiale. Soit

$$W = \bigcup_{x \in X} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times X.$$

Alors W est un ouvert, et l'application $\Phi : W \rightarrow X$ définie par $\Phi(t, x) = \gamma_x(t)$ est de classe C^k .

5. Flot. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $W_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$. Alors, pour $t \geq 0$, l'application $\phi_t : W_t \rightarrow W_{-t}$ est un C^k -difféomorphisme, et, lorsque tout est défini, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

Corollaire 40.0.5. Si ξ est à support compact, $W = \mathbb{R} \times X$, et l'application $t \mapsto \phi_t$ est un homomorphisme de groupes de $\mathbb{R}$ dans $\text{Diff}(X)$.

Définition 40.0.6. On appelle $t \mapsto \phi_t$ le groupe à un paramètre engendré par ξ , ou plus brièvement le flot de ξ .

REMARQUES : Soit $f : X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme, et ξ un champ de vecteurs sur X , $t \mapsto \phi_t$ le flot de ξ . Alors le flot de $f_*\xi$ est $t \mapsto f \circ \phi_t \circ f^{-1}$.

EXEMPLE : Soit V un espace vectoriel de dimension finie, soit $L \in \text{End}(V)$, soit ξ le champ de vecteurs correspondant. Alors le flot ϕ_t de ξ est formé des bijections projectives associées aux bijections linéaires e^{tL} .

En effet, si $p \in \mathbb{P}(V)$ et u est un vecteur directeur de p , la courbe $s \mapsto e^{sL}(p)$ est tangente en $s = t$ à la droite $s \mapsto e^{tL}u + (s - t)L e^{tL}u$ dont la vitesse en $s = t$ est $L_{|e^{tL}p} : e^{tL}p \rightarrow V/e^{tL}p$, c'est une ligne intégrale du champ ξ .

EXERCICE : Soit X une variété séparée et connexe. On note $\text{Diff}_c(X)$ le groupe des difféomorphismes de X qui valent l'identité hors d'un compact. Montrer que $\text{Diff}_c(X)$ agit transitivement sur X , i.e. pour tous $x, x' \in X$, il existe un difféomorphisme à support compact ϕ tel que $\phi(x) = x'$.

Solution. Soit $x \in X$. Soit $\phi_x : U_x \rightarrow V_x$ une carte au voisinage de x . Soit χ une fonction à support compact sur V_x qui vaut 1 sur un voisinage W_x de $0 = \phi(x)$.

Soit $z \in W_x$. Construisons un difféomorphisme à support dans V_x qui envoie 0 sur z . Soit ζ le champ de vecteurs constant sur $\mathbb{R}^n$ qui vaut z . Soit η le champ de vecteurs à support compact sur $\mathbb{R}^n$ défini par $\eta = \chi\zeta$. Le segment de droite $t \mapsto tz$, $t \in [-1, 1]$, est une ligne intégrale de η de condition initiale 0. Par conséquent, le flot $t \mapsto \psi_t$ de η satisfait $\psi_1(0) = z$.

Comme ψ_1 est à support dans V_x , le difféomorphisme $\phi^{-1} \circ \psi_1 \circ \phi$ de U_x , à support compact dans U_x , se prolonge en un difféomorphisme f de X tel que $f(x) = \phi^{-1}(z)$. Cela montre que l'orbite de x sous $\text{Diff}_c(X)$ contient un voisinage de x . En fait, on en déduit que les orbites du groupe $\text{Diff}_c(X)$ sont ouvertes. Comme X est connexe, elle ne peut être partitionnée en ouverts. On conclut qu'il n'y a qu'une orbite. $\square$

40.0.4 Intersection de sous-variétés

Soit Y et Y' deux sous-variétés de X . A quelle condition $Y \cap Y'$ est elle une sous-variété ? Si $f : X \rightarrow Z$ et $f' : X \rightarrow Z'$ sont des submersions et $Y = f^{-1}(z)$, $Y' = f'^{-1}(z')$, il suffit que $(f, f') : X \rightarrow Z \times Z'$ soit une submersion.

Lemme 40.0.7. *Soit F et F' deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors l'application naturelle $E \rightarrow E/F \times E/F'$ est surjective si et seulement si $E = F + F'$.*

DÉMONSTRATION : Le noyau de l'application naturelle $L : E \rightarrow E/F \times E/F'$ est $F \cap F'$. Comme

$$\dim(F \cap F') + \dim(F + F') = \dim(F) + \dim(F') \quad \text{et} \quad \dim(\ker L) + \dim(\operatorname{im} L) = \dim(E),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}(\operatorname{im} L) &= \dim(E/F \times E/F') - \dim(\operatorname{im} L) \\ &= \dim(E/F) + \dim(E/F') - \dim(E) + \dim(F \cap F') \\ &= \dim(E) - \dim(F) - \dim(F') + \dim(F) + \dim(F') - \dim(F + F') \\ &= \operatorname{codim}(F + F'), \end{aligned}$$

donc L est surjective si et seulement si $E = F + F'$.

Autre argument. Remarquons que le dual de E/F s'identifie au sous-espace de E^* polaire F^0 de F , i.e. constitué des formes linéaires qui s'annulent sur F . Alors $(E/F)^* \times (E/F')^* = F^0 \times F'^0$. L'adjoint de L s'écrit $L^* : F^0 \times F'^0 \rightarrow E^*$, $(f, f') \mapsto f + f'$. Son noyau est l'ensemble des couples (f, f') tels que $f' = -f \in F^0 \cap F'^0$. Il s'identifie à $(F + F')^0$. Par conséquent, L^* est injective si et seulement si $E = F + F'$. $\square$

Définition 40.0.8. *On dit que deux sous-espaces vectoriels F et F' d'un espace vectoriel E sont transverses si $E = F + F'$. On dit que deux sous-variétés Y et Y' de X sont transverses si leurs espaces tangents sont transverses en tout point de l'intersection $Y \cap Y'$.*

EXEMPLE : Deux plans de $\mathbb{R}^3$ sont transverses dès qu'ils sont distincts. Une droite D et un plan P de $\mathbb{R}^3$ sont transverses si et seulement si D n'est pas contenue dans P . Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$, en tant que sous-espaces vectoriels, ne sont jamais transverses. Deux droites affines de $\mathbb{R}^3$, en tant que sous-variétés, elles sont transverses si et seulement si elles sont disjointes.

REMARQUES : L'ensemble des couples (f, f') d'applications linéaires dont les images sont transverses est un ouvert de $\operatorname{Hom}(F, E) \times \operatorname{Hom}(F', E)$. Cet ouvert est non vide si et seulement si $\dim(F) + \dim(F') \geq \dim(E)$. Il est alors dense.

Autrement dit, lorsque la condition sur les dimensions est satisfaite, deux sous-espaces en position générale sont transverses.

Proposition 40.0.9. *Si deux sous-variétés Y et Y' de X sont transverses, alors $Y \cap Y'$ est ou bien vide, ou bien une sous-variété de codimension*

$$\operatorname{codim}(Y \cap Y') = \operatorname{codim}(Y) + \operatorname{codim}(Y').$$

DÉMONSTRATION : Il s'agit d'une propriété locale. Localement, Y et Y' sont définies par des submersions f et f' . D'après le lemme 40.0.7, (f, f') est une submersion, donc $Y \cap Y'$ est une sous-variété. $\square$

EXERCICE : Etudier l'intersection d'un tore de révolution avec une famille de plans parallèles.

40.1 Orientation

40.1.1 Rappel : orientation d'un espace vectoriel

Certaines opérations de la géométrie euclidienne, comme le produit mixte et le produit vectoriel, nécessitent le choix d'une orientation. Par exemple, la définition du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace ambiant nécessite la convention des 3 doigts de la main droite.

En effet, le produit mixte de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ euclidien, c'est, au signe près, le déterminant dans une base orthonormée. Mais deux bases orthonormées diffèrent d'une isométrie dont le déterminant peut valoir 1 ou -1 , d'où une ambiguïté sur le signe, qu'on lève en fixant une fois pour toute une classe d'équivalence de bases de même signe.

Bien qu'on l'ait motivée par des considérations euclidiennes, et qu'on y pense souvent en termes euclidiens (une base du plan est directe si et seulement si les vecteurs forment un angle compris entre 0 et π , elle est indirecte si et seulement si les vecteurs forment un angle compris entre π et 2π), la notion d'orientation ne nécessite pas de structure euclidienne. Toute bijection linéaire entre espaces vectoriels transporte les orientations de l'un sur l'autre.

40.1.2 Orientation d'une variété

Définition 40.1.1. Soit X une variété. Orienter X , c'est choisir une orientation de chaque espace tangent de façon continue, i.e., si $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ est une carte, les orientations transportées par les différentielles $d_x\phi : T_xX \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont toutes les mêmes.

REMARQUES : Définition équivalente. Orienter X , c'est choisir un atlas formé de cartes à valeurs dans des espaces vectoriels orientés, telles que les changements de cartes préservent l'orientation.

En effet, un tel atlas permet d'orienter de façon continue les espaces tangents. Réciproquement, une fois les espaces tangents orientés, l'atlas des cartes préservant l'orientation convient.

40.1.3 Orientabilité

Définition 40.1.2. Une variété est orientable si elle possède une orientation.

EXEMPLE : La sphère est orientable.

En effet, on peut définir sa structure différentielle au moyen de 2 cartes seulement, donc un seul changement de cartes, qu'on peut supposer direct. Autre procédé : fixer une orientation sur $\mathbb{R}^{n+1}$, munir $T_vS^n = v^\perp$ de la classe des bases $(v_1, \dots, v_n)$ telles que $(v_1, \dots, v_n, v)$ est une base directe de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 40.1.3. Soit G un groupe discret qui agit librement et proprement par difféomorphismes d'une variété V . Alors la variété quotient $X = G \div V$ est orientable si et seulement si V est orientable et G préserve l'orientation.

DÉMONSTRATION : Si X est orienté, on peut tirer en arrière l'orientation de X par le revêtement $p : V \rightarrow X$, en une orientation de V qui est préservée par les transformations de revêtements. Réciproquement, si G préserve l'orientation, celle-ci passe au quotient sans ambiguïté. $\square$

Corollaire 40.1.4. *L'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si n est impair.*

DÉMONSTRATION : $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = G \div S^n$ est engendré par l'antipodie $a : v \mapsto -v$. a préserve (resp. change) l'orientation de $\mathbb{R}^{n+1}$ si et seulement si n est impair (resp. pair), et a préserve la normale sortante, donc a préserve (resp. change) l'orientation de S^n si et seulement si n est impair (resp. pair). $\square$

Proposition 40.1.5. *Toute variété X possède un revêtement à deux feuilletts $p : X^{or} \rightarrow X$, appelé revêtement d'orientation, qui a la propriété suivante : X^{or} est trivial si et seulement si X est orientable. De plus, X^{or} est une variété orientable, et X est le quotient de X^{or} par une action du groupe à deux éléments.*

DÉMONSTRATION : Soit X^{or} l'ensemble des couples (x, o_x) où o_x est une orientation de $T_x X$. On note $p : X^{or} \rightarrow X$, $(x, o_x) \mapsto x$. Si $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte, et si $\mathbb{R}^n$ est muni d'une orientation o , on définit une section $s_{U, \phi, o}$ de p au-dessus de U par $s_{U, \phi, o}(x) = (x, (d_x \phi)^{-1}(o))$. Les ensembles $s_{U, \phi, o}(U)$ forment la base d'une topologie sur X^{or} , qui rend p et les $s_{U, \phi, o}$ continues. Comme $p^{-1}(U) = s_{U, \phi, o}(U) \sqcup s_{U, \phi, -o}(U)$, p est un revêtement. Comme il n'a que 2 feuilletts, il est automatiquement galoisien.

Par définition, une orientation d'un ouvert V de X correspond à une section continue de p au-dessus de V . Par conséquent, X est orientable si et seulement si p possède une section globale. Pour un revêtement galoisien, cela équivaut à être trivial.

Sur l'image $s_{U, \phi, o}(U)$, $\phi \circ p$ est un homéomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On obtient ainsi une structure différentielle sur X^{or} qui fait de p un difféomorphisme local (cf. proposition 29.2.10). Cet atlas définit une orientation. En effet, étant données deux cartes $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\phi' : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ et des orientations o et o' sur $\mathbb{R}^n$ telles que $s_{U, \phi, o}(U) \cap s_{U', \phi', o'}(U') \neq \emptyset$, nécessairement $(d_x \phi)^{-1}(o) = (d_x \phi')^{-1}(o')$ aux points de $U \cap U'$, donc le changement de cartes $\phi' \circ p \circ (\phi \circ p)^{-1} = \phi' \circ \phi^{-1}$ préserve l'orientation. Cela prouve que X^{or} est orientable. $\square$

Corollaire 40.1.6. *Toute variété simplement connexe est orientable.*

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Si $X = G \div E$ n'est pas orientable, et si E est orientable, alors $X^{or} = G^+ \div E$, où G^+ est le sous-groupe de G formé des difféomorphismes qui préservent l'orientation.
2. La bande de Möbius est le quotient d'une bande infinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1\}$ par le groupe engendré par le difféomorphisme $g : (x, y) \mapsto (x + 1, -y)$. Elle n'est pas orientable. Son revêtement des orientations est difféomorphe à la bande ordinaire. Remarquer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ contient une bande de Möbius.
3. La bijection affine g ci-dessus normalise le groupe des translations entières (i.e. si $\tau \in \mathbb{Z}^2$ est une translation entière, alors $g \circ \tau \circ g^{-1}$ est encore une translation entière). Par conséquent, elle induit un difféomorphisme $\tilde{g}$ du tore $\mathbb{Z}^2 \div \mathbb{R}^2$, qui engendre un groupe $\tilde{G}$ à 2 éléments. La bouteille de Klein est le quotient du tore par $\tilde{G}$. Son revêtement des orientations est le tore.

40.2 Éléments de topologie différentielle

Désormais, on va donner quelques résultats de *topologie différentielle*, i.e. qui tournent autour du problème de classification des variétés. Les démonstrations ne seront pas toujours complètes.

40.2.1 Régularité

Du point de vue de la topologie différentielle, il n'y a aucune différence entre C^1 , C^r , $r \geq 2$, C^∞ (ou même C^ω , mais cela demande davantage de travail). On va montrer que toute structure différentielle de classe C^2 possède un atlas compatible de classe C^∞ .

Lemme 40.2.1. *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété compacte de classe C^r , $r \geq 2$. Alors il existe un voisinage U de X dans $\mathbb{R}^n$ et une rétraction de classe C^{r-1} : $U \rightarrow X$.*

REMARQUES : On appelle U un *voisinage tubulaire* de X dans $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION : Pour $x \in X$, on note $\pi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x X$ le projecteur orthogonal (il dépend C^{r-1} de x), $\nu_x = \ker \pi_x$ et $\nu X = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^n \mid v \in \nu_x\}$.

Montrons que νX est une sous-variété de classe C^{r-1} . Pour x voisin de x_0 , la restriction de π_{x_0} à $T_x X$ est bijective. Autrement dit, $\ker(\pi_{x_0} \circ \pi_x) = \ker \pi_x = \nu_x$. Par conséquent, au voisinage de $\{x_0\} \times \nu_{x_0}$, νX est défini par l'équation $g(x, v) = 0$ où $g : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow T_{x_0} X$ est définie par $g(x, v) = \pi_{x_0} \circ \pi_x(v)$. g est une submersion en tout point de $\{x_0\} \times \nu_{x_0}$, donc νX est une sous-variété.

L'application $\phi : \nu X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, v) \mapsto x + v$ est une immersion en tout point de $X \times \{0\}$. Montrons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que ϕ est injective sur l'ouvert $V = \{(x, v) \in \nu X \mid |v| < \epsilon\}$. Sinon, il existe des suites (x_j, v_j) et $(y_j, w_j) \in \nu X$, avec $|v_j|$ et $|w_j|$ tendant vers 0, telles que $\phi(x_j, v_j) = \phi(y_j, w_j)$. Par compacité, on peut supposer que x_j tend vers x et y_j vers y . Nécessairement,

$$x = \phi(x, 0) = \lim \phi(x_j, v_j) = \lim \phi(y_j, w_j) = \phi(y, 0) = y.$$

Or, comme ϕ est une immersion en $(x, 0)$, il existe un voisinage de $(x, 0)$ sur lequel ϕ est injective, contradiction.

$U = \phi(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'application ϕ^{-1} composée avec la projection $X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$ est la rétraction cherchée. $\square$

Définition 40.2.2. *Soit X un espace topologique compact. Sur l'ensemble $\mathcal{A}_r$ des atlas de classe C^r de X , on met la topologie dont une base de voisinages est obtenue comme suit. Soit $(\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n)$ un atlas. Soit $K_i \subset U_i$ des compacts. Soit $\epsilon > 0$. On considère les atlas $(\phi'_i : U'_i \rightarrow \mathbb{R}^n)$ tels que $K_i \subset U'_i$, et $|\phi'_i \circ \phi_i^{-1} - \text{id}|_{C^r(\phi_i(K_i))} < \epsilon$.*

Proposition 40.2.3. *Pour tout $r \geq 1$, $\mathcal{A}_\infty$ est dense dans $\mathcal{A}_r$. De plus, deux atlas de $\mathcal{A}_r$ suffisamment voisins définissent des structures différentielles difféomorphes sur X .*

DÉMONSTRATION : On peut lisser un C^1 -difféomorphisme par convolution. Sur l'intérieur

d'un compact contenu dans le domaine, une application C^1 proche d'un difféomorphisme est à nouveau un difféomorphisme. Cela montre la densité.

Supposons $r \geq 2$. Soit (ϕ_i) un atlas. Le théorème de plongement de Whitney fournit un plongement $f_{(\phi_i)} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si (ψ_i) est un atlas suffisamment proche de (ϕ_i) , le plongement $f_{(\psi_i)}$ est C^0 -proche de $f_{(\phi_i)}$. En particulier, son image est contenue dans un voisinage tubulaire de $f_{(\phi_i)}$. En composant $f_{(\psi_i)}$ avec la rétraction, on obtient un difféomorphisme de $(X, (\psi_i))$ sur $(X, (\phi_i))$. Le cas $r = 1$ demande davantage de travail. $\square$

REMARQUES : La proposition 40.2.3 montre que la classification des variétés compactes à difféomorphisme près doit s'exprimer au moyen d'invariants discrets, par exemple, à valeurs entières, et non continus.

En fait, elle montre que l'ensemble des classes de difféomorphisme de variétés compactes est dénombrable.

40.2.2 Classification des variétés de dimension 1

Théorème 96. *Toute variété compacte connexe de dimension 1 est difféomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

DÉMONSTRATION : On commence par supposer la variété de classe C^r avec $r \geq 2$.

1. Cas orientable. Soit $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ un atlas fini définissant une orientation de X . Notons ζ un champ de vecteurs constant sur $\mathbb{R}$. Soit (χ_i) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_i) . Posons $\xi = \sum_i \chi_i (\phi_i^{-1})_* \zeta$. Alors ξ est un champ de vecteurs différentiable sur X , qui ne s'annule jamais. En effet, pour tous indices i et j , $(\phi_j \phi_i^{-1})_* \zeta = \lambda_{i,j} \zeta$ où la fonction $\lambda_{i,j}$ est strictement positive. Alors

$$(\phi_j)_* \xi = \left(\sum_i \chi_i \lambda_{i,j} \right) \zeta,$$

et $\sum_i \chi_i \lambda_{i,j} > 0$ partout. Pour $x \in X$, notons $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow X$ la ligne intégrale de condition initiale x . Alors le vecteur vitesse $\gamma'_x(t) = \xi(\gamma_x(t))$ ne s'annule pas, donc γ_x est une immersion, et son image, l'orbite de x , est un ouvert de X . Comme les orbites partitionnent X , et X est connexe, il y a une seule orbite, donc γ_x est surjective. Si γ_x était injective, alors γ_x serait un homéomorphisme, ce qui est impossible, car $\mathbb{R}$ n'est pas compact. On conclut qu'il existe $s, s' \in \mathbb{R}$, $s \neq s'$, tels que $\gamma_x(s) = \gamma_x(s')$. Alors $t \mapsto \gamma_x(t + s)$ et $t \mapsto \gamma_x(t + s')$ sont des lignes intégrales de ξ de même condition initiale, donc $\gamma_x(t + s) = \gamma_x(t + s')$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, γ_x est $|s' - s|$ -périodique. Soit T la plus petite période de γ_x . Alors γ_x passe au quotient en un difféomorphisme $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow X$ préservant l'orientation.

2. Cas non orientable. Soit X^{or} le revêtement des orientations de X . Alors X^{or} est orientable, donc X^{or} est difféomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et $X = G \div X^{or}$ où G est un groupe à deux éléments engendré par un difféomorphisme a de X^{or} renversant l'orientation. Alors a se relève en un automorphisme $\tilde{a}$ du revêtement universel $\tilde{X} = \widetilde{X^{or}} = \mathbb{R}$, qui renverse l'orientation. Autrement dit, $\tilde{a}$ est une fonction dont la dérivée est partout strictement négative. Elle tend vers $\mp\infty$ en $\pm\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\tilde{a}(t) = t$ possède une solution, ce qui est impossible pour un automorphisme d'un revêtement. On conclut que X est forcément orientable.

3. Cas des variétés de classe C^1 . Il suffit de remarquer qu'intégrer un champ de vecteurs en dimension 1, ce n'est rien d'autre qu'intégrer une fonction, donc un champ de vecteurs de classe C^0 seulement possède des lignes intégrales. $\square$

REMARQUES : Pour peu qu'on sache construire des partitions de l'unité, le même argument montre que toute variété séparée, paracompacte, non compacte, connexe de dimension 1 est difféomorphe à $\mathbb{R}$.

40.3 Caractéristique d'Euler-Poincaré

40.3.1 Décompositions cellulaires convexes

Une *décomposition cellulaire convexe* d'un compact K du plan, c'est une collection finie segments de droites (appelés *arêtes*) contenus dans K telle que

1. deux arêtes distinctes sont disjointes ou partagent une extrémité ;
2. la frontière de K est une réunion d'arêtes ;
3. chaque composante connexe du complémentaire de la réunion des arêtes est convexe.

On appelle les adhérences de ces composantes les *faces* de la décomposition cellulaire. On appelle *sommets* les extrémités des arêtes.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Si K est un polygone convexe, il admet une décomposition cellulaire à une seule face, dont les arêtes sont les côtés de K .
2. Si K est une ligne polygonale sans auto-intersection, il admet une décomposition cellulaire naturelle.

Définition 40.3.1. Soit C une décomposition cellulaire convexe d'un compact du plan. On note S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, F le nombre de faces. On appelle caractéristique d'Euler-Poincaré de C le nombre $\chi(C) = S - A + F$.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Pour la décomposition cellulaire à 1 face d'un polygone convexe, $\chi = 1$.
2. Si K est une ligne polygonale ouverte (i.e. ses extrémités sont distinctes), alors $\chi = 1$.
Si K est une ligne polygonale fermée, $\chi = 0$.

Proposition 40.3.2. Soit C une décomposition cellulaire convexe d'un polygone convexe du plan. Alors $\chi(C) = 1$.

DÉMONSTRATION : Si s est un sommet et f une face qui lui est adjacente (i.e. $s \in \bar{f}$), notons $\text{int}(s, f) \in]0, \pi]$ l'angle intérieur de f en s , et $\text{ext}(s, f) = \pi - \text{int}(s, f)$ l'angle extérieur de f en s .

Notons $ext(f)$ la somme des angles extérieurs de f en tous ses sommets. Alors $ext(f) = 2\pi$. En effet, lorsqu'on parcourt le bord de la face f , à chaque sommet s la direction suivie tourne de $ext(s, f)$, et lorsque le tour est fini, la direction a fait un tour complet.

Notons $int(s)$ la somme des angles intérieurs en s des faces de C adjacentes à s . Alors $int(s) = 2\pi$ si s est à l'intérieur de K . Sinon, $int(s) = int(s, K)$ est l'angle intérieur de K en s . On note S_{int} le nombre de sommet intérieurs et $S_{\partial K}$ le nombre de sommets du bord, de sorte que $S = S_{int} + S_{\partial K}$.

On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} ext(s, f) &= \sum_f \sum_{s \text{ sommet de } f} ext(s, f) \\ &= \sum_f ext(f) \\ &= 2\pi F. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} int(s, f) &= \sum_s \sum_{f \text{ adjacente à } s} int(s, f) \\ &= \sum_s int(s) \\ &= 2\pi S_{int} + \sum_{s \in \partial K} int(s, K) \\ &= 2\pi S_{int} + \sum_{s \in \partial K} (\pi - ext(s, K)) \\ &= 2\pi S_{int} + \pi S_{\partial K} - 2\pi. \end{aligned}$$

Si a est une arête orientée de C , qui n'est pas contenue dans le bord de K , il lui correspond un couple (s, f) tels que s est un sommet de f : s est l'origine de a et f la face dont un côté est a , située à gauche de a . Si a est une arête de ∂K , il y a exactement une des deux orientations pour laquelle la face située à gauche existe. Réciproquement, étant donné un couple (s, f) tels que s est un sommet de f , il lui correspond une arête orientée, celle telle que, lorsqu'on la parcourt, on a la face f à sa gauche. Par conséquent, le nombre de couples (s, f) tels que s est un sommet de f est égal au nombre d'arêtes intérieures orientées plus le nombre d'arêtes du bord, sans orientation. Si on note A_{int} le nombre d'arêtes intérieures et $A_{\partial K}$ le nombre d'arêtes du bord, de sorte que $A = A_{int} + A_{\partial K}$, il vient

$$\sum_{(s,f)} 1 = 2A_{int} + A_{\partial K}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} int(s, f) + \sum_{(s,f)} ext(s, f) &= \sum_{(s,f)} \pi \\ &= \pi(2A_{int} + A_{\partial K}), \end{aligned}$$

d'où

$$2\pi F + 2\pi S_{int} + \pi S_{\partial K} - 2\pi = 2\pi A_{int} + \pi A_{\partial K},$$

ce qui peut s'écrire

$$S_{int} - A_{int} + F = 1 - \frac{1}{2}(S_{\partial K} - A_{\partial K}),$$

ou

$$\chi(C) = 1 + \frac{1}{2}\chi(\partial K).$$

Comme le bord de K est une ligne polygonale fermée, $\chi(\partial K) = 0$, donc $\chi(C) = 1$. $\square$

40.3.2 Invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré

Lemme 40.3.3. *Si $K = K_1 \cup K_2$ et C est une décomposition cellulaire convexe de K qui induit des décompositions cellulaires C_1, C_2 et C_0 sur K_1, K_2 et $K_0 = K_1 \cap K_2$, alors*

$$\chi(C) = \chi(C_1) + \chi(C_2) - \chi(C_0).$$

DÉMONSTRATION : Chaque sommet (resp. arête, resp. face) de C_0 est aussi un sommet (resp. arête, resp. face) de C_1 et de C_2 simultanément, donc $S = S_1 + S_2 - S_0$, $A = A_1 + A_2 - A_0$, $F = F_1 + F_2 - F_0$. $\square$

Proposition 40.3.4. *Soit K un polygone du plan. Deux décompositions cellulaires convexes de K donnent la même caractéristique d'Euler-Poincaré.*

DÉMONSTRATION : Soit C et C' deux décompositions cellulaires convexes de K .

1. Réduction au cas où C' est plus fine que C .

Comme l'intersection de deux polygones convexes est un polygone convexe, il y a une décomposition cellulaire convexe de K dont les faces sont les intersections de faces de C' et de faces de C . Il suffit de montrer que cette décomposition, raffinement de C' et de C , a même caractéristique d'Euler-Poincaré que C .

2. Cas où C n'a aucune face.

Dans ce cas, C et C' sont deux graphes homéomorphes. Il ont donc les mêmes composantes connexes, qui ont mêmes connectivités $A - S + 1$ (voir cours sur le groupe fondamental), donc même caractéristique d'Euler-Poincaré. On peut aussi remarquer que subdiviser les arêtes ne change pas $S - A$.

3. Récurrence sur le nombre de faces de C .

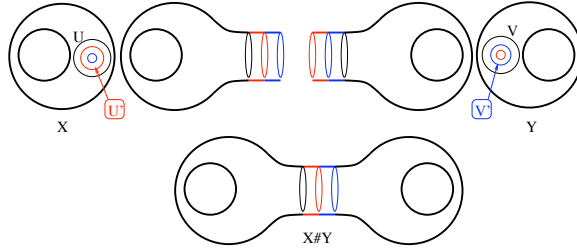
On retire l'intérieur de toutes ses faces à C , on obtient un graphe K_0 muni de deux décompositions C_0 et C'_0 . Puis on ajoute l'intérieur d'une face de C , cela donne un polygone K_1 muni de deux décompositions C_1 et C'_1 plus fine, etc... Supposons que $\chi(C_k) = \chi(C'_k)$. Par définition, $\chi(C_{k+1}) = \chi(C_k) + 1$. Remarquer que $K_{k+1} = K_k \cup f$ où f est une seule face de C , mais est décomposée en plusieurs faces au sens de C' . D'après le lemme 40.3.3, $\chi(C'_{k+1}) = \chi(C'_k) + \chi(f) - \chi(K_k \cap f) = \chi(C'_k) + 1$, car $K_k \cap f$ est une ligne polygonale fermée sans point double. Cela montre que $\chi(C'_{k+1}) = \chi(C_{k+1})$, et donc que $\chi(C') = \chi(C)$, par récurrence sur k . $\square$

40.4 Variétés compactes de dimension 2

On commence par construire des exemples.

40.4.1 Somme connexe

Soit X et Y deux variétés de même dimension n . Notons B la boule ouverte de centre 0 et de rayon 2 dans $\mathbb{R}^n$, B' la boule unité ouverte. Soit U un ouvert de X , V un ouvert de Y , ϕ un difféomorphisme de U sur B et ψ un difféomorphisme de V sur B . On note $U' = \phi^{-1}(B')$ et $V' = \psi^{-1}(B')$. On considère l'espace topologique $X \# Y$ obtenu recollant $X \setminus U'$ et $Y \setminus V'$ le long de leur bord, au moyen de l'homéomorphisme $\psi^{-1} \circ \phi|_{\partial U'}$. Noter que $X \# Y$ dépend des choix de ϕ et ψ .



On munit $X \# Y$ d'une structure différentielle comme suit. L'atlas contient toutes les cartes de X et de Y dont le domaine ne rencontre pas U' ou V' . Il contient aussi une carte Φ dont le domaine est $(U \setminus U') \cup (V \setminus V')$ (vu comme un ouvert de $X \# Y$), et définie par

$$\begin{cases} \Phi(x) = \phi(x) & \text{si } x \in U \setminus U', \\ \Phi(y) = \frac{\psi(y)}{|\psi(y)|^2} & \text{si } y \in V \setminus V'. \end{cases}$$

Définition 40.4.1. On appelle somme connexe de X et Y suivant ϕ et ψ la variété ainsi obtenue.

EXEMPLE : Si $Y = S^n$ est la sphère de dimension n , et $\psi : V \rightarrow B$ est donné par la projection stéréographique, alors $X \#_\psi Y$ est difféomorphe à X .

En effet, l'inversion $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$ se prolonge en un difféomorphisme global i de S^n . On définit un difféomorphisme Ψ de $X \# S^n$ sur X en posant,

$$\begin{cases} \Psi(x) = x & \text{si } x \in X \setminus U', \\ \Psi(y) = \phi^{-1} \circ i(y) & \text{si } y \in S^n \setminus V'. \end{cases}$$

REMARQUES : Si $n \geq 3$, $\pi_1(X \# Y) = \pi_1(X) \star \pi_1(Y)$ est un produit libre. Si $n = 2$, $\pi_1(X \# Y) = \pi_1(X \setminus U') \star_{\mathbb{Z}} \pi_1(Y \setminus V')$ est une somme amalgamée au-dessus de $\mathbb{Z}$.

Cela permet de voir qu'en général $X \# Y$ n'est difféomorphe ni à X ni à Y .

40.4.2 Dépendance par rapport aux choix

Proposition 40.4.2. Soit X et Y des variétés connexes. A difféomorphisme près, la variété $X \sharp Y$ ne dépend que de l'orientation de ϕ et de ψ . Précisément,

1. si X ou Y n'est pas orientable, $X \sharp Y$ est indépendante des choix ;
2. si X (ou Y) est orientable et admet un difféomorphisme renversant l'orientation, $X \sharp Y$ est indépendante des choix ;
3. si X et Y sont orientables, on peut obtenir au plus deux variétés $X \sharp Y$, suivant que $\psi^{-1} \circ \phi$ préserve ou non l'orientation.

DÉMONSTRATION : Soit U_1 et U_2 deux ouverts contenant un point x de X , soit $\phi_1 : U_1 \rightarrow B$ et $\phi_2 : U_2 \rightarrow B$ deux difféomorphismes sur la boule B de rayon 2, envoyant x en 0, et ayant même différentielle en x . Posons $U_{i,\epsilon} = \phi_i^{-1}(B(0, 2\epsilon))$, $\phi_{i,\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}(\phi_i)|_{U_{i,\epsilon}} : U_{i,\epsilon} \rightarrow B$. D'après le lemme 40.2.3, la structure différentielle sur $X \sharp_{\phi_{i,\epsilon}} Y$ ne dépend pas de ϵ . Lorsque ϵ tend vers 0, $\phi_{1,\epsilon}^{-1} \circ \phi_{2,\epsilon}$ converge vers l'identité, donc pour ϵ assez petit, $X \sharp_{\phi_{1,\epsilon}} Y$ et $X \sharp_{\phi_{2,\epsilon}} Y$ sont difféomorphes. On conclut que ϕ_1 et ϕ_2 définissent la même somme connexe. Celle-ci ne dépend donc que de la donnée de points $x \in X$ et $y \in Y$, ainsi que d'isomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^n$ sur $T_x X$ et $T_y Y$ respectivement. Comme X et Y sont connexes par arcs, le choix des points est sans importance. De même, seule compte la composante connexe de $\text{Isom}(T_x X, \mathbb{R}^n)$ à laquelle $d_x \phi$ appartient, i.e. le fait que ϕ préserve ou non l'orientation.

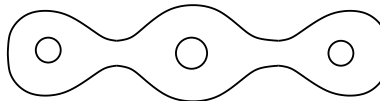
Si X n'est pas orientable, il existe un lacet dans X basé en x dont le relèvement dans le revêtement des orientations X^{or} n'est pas un lacet. On peut donc déformer continûment ϕ en un difféomorphisme ϕ' d'un voisinage de x sur la boule B tel que $\phi^{-1} \circ \phi'$ renverse l'orientation. Cela signifie que $X \sharp_{\phi} Y = X \sharp_{\phi'} Y$ ne dépend pas de la composante connexe de $\text{Isom}(T_x X, \mathbb{R}^n)$ à laquelle $d_x \phi$ appartient.

Si X possède un difféomorphisme global Φ qui renverse l'orientation, celui-ci induit un difféomorphisme de $X \sharp_{\phi} Y$ sur $X \sharp_{\Phi \circ \phi} Y$, et de nouveau $X \sharp_{\phi} Y$ ne dépend pas de la composante connexe de $\text{Isom}(T_x X, \mathbb{R}^n)$ à laquelle $d_x \phi$ appartient. $\square$

Terminologie. Dans la suite, lorsque X et Y sont orientables, on notera $X \sharp Y$ celle des sommes connexes qui est orientable (obtenue à l'aide d'une carte orientée de X et d'une carte de Y renversant l'orientation).

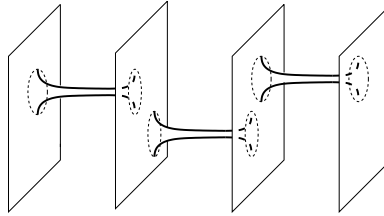
40.4.3 Exemples de variétés de dimension 2

Définition 40.4.3. Soit $g \in \mathbb{N}$ un entier. On appelle surface orientable de genre g , et on note Σ_g , la variété obtenue à partir de la sphère en effectuant g sommes connexes avec un tore.



Surface orientable de genre 3

Définition 40.4.4. Soit $g \in \mathbb{N}$ un entier. On appelle surface non orientable de genre g , et on note U_g , la variété obtenue à partir du plan projectif en effectuant g sommes connexes avec un plan projectif.



La surface non orientable de genre 3

40.4.4 Décompositions cellulaires lisses

Voici une généralisation, invariante par difféomorphisme, de la notion de décomposition en cellulaire convexe.

Définition 40.4.5. Soit X une variété de dimension 2, et $K \subset X$ un compact. Une décomposition cellulaire lisse de K , c'est la donnée d'une famille finie d'arcs de classe C^1 plongés dans K appelés arêtes tels que

- deux arêtes sont disjointes ou partagent une extrémité ;
- pour chaque composante connexe D du complémentaire dans K de la réunion des arêtes, il existe un voisinage de l'adhérence de D qui est l'image par un difféomorphisme Φ d'un ouvert U du plan, tel que $\Phi^{-1}(D)$ soit un polygone convexe.

Dans ce cas, on appelle *sommets* de la décomposition les extrémités des arêtes et *faces* de la décomposition les composantes connexes du complémentaire de la réunion des arêtes. Si toutes les faces sont des triangles, on parle de *triangulation lisse*. De nouveau, on appelle $\chi(C) = S - A + F$ la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de la décomposition cellulaire.

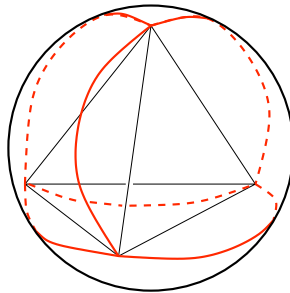
Le lemme 40.3.3 s'étend aux décompositions cellulaires lisses, avec la même preuve.

Lemme 40.4.6. Si $K = K_1 \cup K_2$ et C est une décomposition cellulaire lisse de K qui induit des décompositions cellulaires C_1 , C_2 et C_0 sur K_1 , K_2 et $K_0 = K_1 \cap K_2$, alors

$$\chi(C) = \chi(C_1) + \chi(C_2) - \chi(C_0).$$

40.4.5 Exemples de décompositions cellulaires lisses

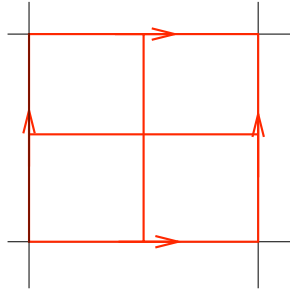
EXEMPLE : La sphère S^2 possède une décomposition cellulaire lisse, obtenue en projetant radialement un tétraèdre régulier.



Il y a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 2.

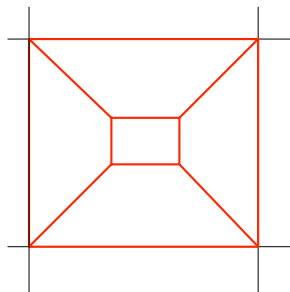
En particulier, le disque possède une décomposition lisse avec 4 sommets, 6 arêtes et 3 faces, donc sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 1.

EXEMPLE : Le tore T^2 possède une décomposition cellulaire lisse.



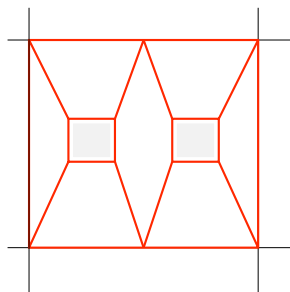
Il y a 2 sommets, 6 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 0.

EXEMPLE : Le tore troué $T^2 \setminus D$ possède une décomposition cellulaire lisse.



Il y a 5 sommets, 10 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut -1 .

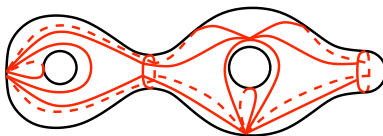
EXEMPLE : Le tore troué deux fois $T^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ possède une décomposition cellulaire lisse.



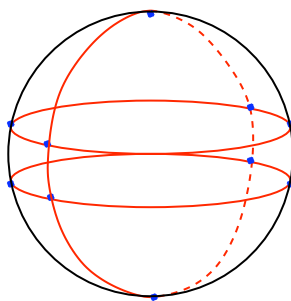
Il y a 10 sommets, 19 arêtes et 7 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut -2 .

EXEMPLE : La surface orientable Σ_g de genre g possède une décomposition cellulaire, compatible avec une décomposition en un tore troué, $g - 1$ tores troués deux fois et un disque.

La caractéristique d'Euler-Poincaré de cette décomposition vaut $2 - 2g$.



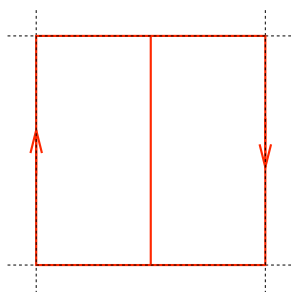
EXEMPLE : La sphère S^2 possède une décomposition cellulaire lisse, invariante par l'antipodie. En quotientant par l'antipodie, on obtient une décomposition cellulaire lisse du plan projectif.



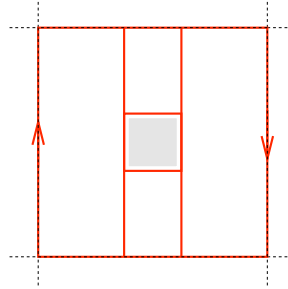
Pour le plan projectif, il y a 5 sommets, 10 arêtes et 6 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 1.

En particulier, le plan projectif privé d'un disque (aussi appelé *bande de Möbius*) possède une décomposition cellulaire lisse avec 4 sommets, 6 arêtes et 2 faces, donc sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 0.

On peut aussi voir la *bande de Möbius* comme le quotient de la bande $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq y \leq 1/2\}$ par le groupe engendré par $(x, y) \mapsto (x+1, -y)$. La décomposition cellulaire apparaît comme suit.

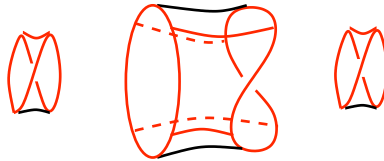


EXEMPLE : La bande de Möbius trouée admet une décomposition cellulaire lisse.



Il y a 10 sommets, 15 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut -1 .

EXEMPLE : La surface non orientable U_g possède une décomposition cellulaire lisse compatible avec la décomposition en une bande de Möbius, $g - 1$ bandes de Möbius trouées, et une bande de Möbius. Sa caractéristique d'Euler-Poincaré égale à $1 - g$.



40.4.6 Décompositions, revêtements et sommes connexes

Proposition 40.4.7. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Soit C une décomposition cellulaire lisse de X . Il existe une unique décomposition cellulaire lisse $\tilde{C}$ de E dont chaque face est envoyée bijectivement sur une face de X . Si le revêtement a d feuillets, alors $\chi(\tilde{C}) = d\chi(C)$.

DÉMONSTRATION : Comme chaque face f est simplement connexe, le revêtement $p|_{p^{-1}(f)} : p^{-1}(f) \rightarrow f$ est trivial, i.e. $p^{-1}(f) = \sqcup_j s_j(f)$ où les s_j sont des sections de p au-dessus de f . La collection des $s_j(f)$ forme la décomposition $\tilde{C}$.

Chaque sommet, arête, face de C donne naissance à d sommets, arêtes, faces distincts de $\tilde{C}$, donc $\tilde{S} = dS$, $\tilde{A} = dA$, $\tilde{F} = dF$. $\square$

Proposition 40.4.8. Soit X et Y deux variétés compactes de dimension 2. Alors

$$\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

DÉMONSTRATION : D'après la règle d'addition, $\chi(X) = \chi(X \setminus U) + \chi(U) - \chi(\partial U) = \chi(X \setminus U) + 1$. De plus

$$\chi(X \# Y) = \chi(X \setminus U) + \chi(Y \setminus V) - \chi(\partial U) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

$\square$

40.4.7 Classification des variétés compactes de dimension 2

On admettra les trois théorèmes suivants.

Théorème 97. *Toute variété de dimension 2 compacte admet une triangulation lisse.*

Théorème 98. *Soit X une variété de dimension 2 compacte. Les décompositions cellulaires lisses de X ont toutes même caractéristique d'Euler-Poincaré, notée $\chi(X)$.*

EXERCICE : A l'aide de ce théorème, et des propositions 40.4.7 et 40.4.8, retrouver de façon plus directe les résultats numériques du paragraphe précédent.

Théorème 99. *Les variétés compactes connexes orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier pair ≤ 2 . Les variétés compactes connexes sans bord non orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier ≤ 1 .*

Autrement dit, toute variété compacte connexe orientable de dimension 2 est difféomorphe à une et une seule des surfaces Σ_g , où, par convention, Σ_0 est la sphère. Toute variété compacte connexe orientable de dimension 2 est difféomorphe à une et une seule des surfaces U_g , $g \geq 0$, où, par convention, U_0 est le plan projectif.

EXERCICE : Dédurre de la classification que toute surface orientable possède un difféomorphisme renversant l'orientation et sans points fixes.

Contents

Laboratoire de Mathématique d'Orsay
U.M.R. 8628 du C.N.R.S.
Université de Paris-Sud
91405 Orsay, France
Pierre.Pansu@math.u-psud.fr
<http://www.math.u-psud.fr/~pansu>