Surfaces convexes dans l'espace hyperbolique et $\mathbb{CP}^1$-structures.

François LABOURIE

Notre but dans ce papier est de relier surfaces convexes dans l'espace hyperbolique et uniformisation. En particulier, nous obtiendrons de nouvelles paramétrisations de l'espace des $\mathbb{CP}^1$-structures. D'une certaine manière, nos résultats peuvent se décrire comme des lissages de constructions dues à Thurston, lissages obtenus en remplaçant l'étude des surfaces plissées à courbure -1 dans l'espace hyperbolique, par celle des surfaces lisses à courbure constante comprise entre 0 et -1.

Notre remarque initiale est qu'à une surface localement convexe dans l'espace hyperbolique, est associée naturellement un certain nombre de structures. Tout d'abord des métriques: la première forme fondamentale (ou métrique induite), la deuxième forme fondamentale et la troisième forme fondamentale (voir les définitions en 1.5.).

On peut aussi construire une structure projective complexe naturelle grâce à l'application de Gauss hyperbolique. Cette application associe à un point de la surface le point de la sphère à l'infini extrémité de la normale extérieure. Grâce à la convexité cette application est une immersion et nous permet de définir une $\mathbb{CP}^1$-structure, dite *associée*, sur notre surface.

Nous nous intéresserons tout particulièrement aux surfaces à courbure constante k comprise entre -1 et 0. Soit donc S une telle surface marquée compacte orientée et de genre plus grand que 2 et g sa métrique, nous allons étudier les *immersions isométriques équivariantes* de (S, g) dans $\mathbf{H}^3$, c'est-à-dire les immersions isométriques du revêtement universel de S dans $\mathbf{H}^3$, tordues par une représentation du groupe fondamental. Il est bien connu qu'une telle immersion isométrique équivariante est caractérisé par sa deuxième forme fondamentale à un élément de $PSL(2, \mathbf{C})$ près.

Notre premier théorème nous montre qu'en décrivant toutes les immersions isométriques équivariantes des surfaces à courbure constante k, on décrit exactement les $\mathbb{CP}^1$-structures.

Plus précisement

Théorème 1. *Soit k un nombre réel compris strictement entre 0 et -1. Soit τ une $\mathbb{CP}^1$ structure sur une surface compacte de genre g plus grand que 2. Il*

existe alors une unique surface à courbure constante k et une unique immersion isométrique équivariante de cette surface dont la $\mathbb{CP}^1$-structure associée soit τ.

Précisons que la structure complexe induite par le développement de la structure projective complexe, est a-priori différente de la structure complexe obtenue dans ce théorème. En effet, en général, l'application de Gauss hyperbolique n'est pas conforme. De plus, lorsque l'on fait varier k, la structure conforme obtenue par le théorème varie. Lorsque k tend vers 0, la structure conforme tend vers celle induite par le développement, lorsque k tend vers -1 la structure conforme tend vers celle donnée par la paramétrisation de Thurston (voir 3.4.).

Fixons une métrique g sur S et étudions maintenant $\mathcal{I}(g)$ des immersions isométriques équivariantes de (S, g) dans $\mathbf{H}^3$.

Théorème 2. *L'application de $\mathcal{I}(g)$ dans l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$ de S qui à une immersion isométrique équivariante associe la structure conforme définie par sa deuxième forme fondamentale est une homéomorphisme.*

Théorème 3. *De même, l'application qui à une immersion isométrique équivariante associe la structure conforme de sa troisième forme fondamentale est un homéomorphisme.*

Nous verrons de plus que la troisième forme fondamentale est elle même à courbure constante et vérifie d'intéressantes propriétés de symétrie qui justifie son intérêt.

Avec le théorème 1, nous obtenons immédiatement le corollaire suivant sur les paramétrisations de l'espace des $\mathbb{CP}^1$-structures par $\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S)$.

Corollaire 1. *Fixons k et soit (j_1, j_2) une paire de points de $\mathcal{T}(S)$, soit g_1 la métrique à courbure constante k conforme à j_1 et f l'immersion isométrique équivariante de (S, g_1) associée à j_2 par le théorème 2 ou le théorème 3.*

L'application de $\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S)$ dans l'espace des structures projectives complexes sur S qui à (j_1, j_2) associe la structure projective complexe associée à f est un homéomorphisme.

En faisant varier k, nous obtenons ainsi deux familles à un paramètre de paramétrisations de l'espace des structures projectives complexes d'une surface topologique.

Dans le cas des surfaces compactes, nos résultats nous permettent enfin de retrouver de manière indépendante, quoique detournée le théorème de Thurston sur la paramétrisation de l'espace des $\mathbb{CP}^1$-structures par l'espace des laminations géodésiques mesurées sur les surfaces hyperboliques, ce que nous esquisserons en (3.4.).

Le théorème 2 est en fait un corollaire immédiat de l'existence et de l'unicité de difféomeorphismes harmoniques entre surfaces hyperboliques. Le théorème 3 peut également s'énoncer comme un résultat d'existence et d'unicité de difféomorphismes particuliers. Rappelons tout d'abord qu'à un difféomorphime f

entre deux variétés riemanniennes (M_1, g_1) et (M_2, g_2) est associé un morphisme isométrique des fibrés tangents. En effet, il existe un unique opérateur symétrique B de TM_1 tel que

$$f^* g_2(.,.) = g_1(B.,B.)$$

Le morphisme isométrique l'on considère, est le morphisme $Tf \circ B^{-1}$. Nous l'appelerons *morphisme isométrique canonique.*

Le théorème 3 est alors associé au

Corollaire. *Soit S_1 et S_2 deux surfaces hyperboliques de même genre, il existe alors un unique difféomorphisme F de S_1 dans S_2 qui préserve les aires, et tel que le morphisme isométrique canonique associé préserve la connexion. De plus F^{-1} est le difféomorphisme associé à la paire (S_2, S_1).*

Un autre manière de caractériser ces difféomorphismes est d'exiger que leur graphe soit une surface minimale dans $S_1 \times S_2$.

Dans un prochain papier (voir [L3]), nous utiliserons les difféomorphismes obtenus par ce corollaire pour relier la compactification de l'espace de Teichmüller en terme de laminations géodésiques mesurées et les dégénerescences des suites de surfaces convexes.

Enfin signalons que le théorème 3 est l'un des ingrédients clefs de la démonstration du théorème suivant:

Théorème. [L4] *Soit M une variété riemannenne hyperbolique (à courbure constante -1) convexe compacte à bord et de dimension 3, et soit g une métrique à courbure strictement supérieure à -1 sur ∂M, il existe alors une métrique h à courbure constante -1 sur M telle que $h|_{\partial M} = g$.*

1 Quelques rappels et définitions

Nous allons commencer par rappeler, pour fixer les notations, quelques faits concernant les $\mathbb{CP}^1$-structures et les immersions isométriques de surfaces dans l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^3$ de dimension 3. En ce qui concerne les $\mathbb{CP}^1$-structures, nous serons relativement succints et renvoyons à [Go1] [Go2] par exemple, pour une introduction plus complète. Dans cette section, et la suite de cet article, S désignera une surface compacte de genre g supérieur ou égal à 2.

1.1 $\mathbb{CP}^1$-Structures sur une surface.

Soit donc S une surface et $\tilde{S}$ son revêtement universel. Une $\mathbb{CP}^1$-*structure* est la donnée d'une immersion f de $\tilde{S}$ dans $\mathbb{CP}^1$, appelée *développement*, et d'une représentation ρ du $\pi_1(S)$ dans $PSL(2, \mathbf{C})$, appelée *représentation d'holonomie* et vérifiant pour tout s de $\tilde{S}$ et g de $\pi_1(S)$

$$f(g.s) = \rho(g)f(s).$$

L'espace $\mathbf{CP}(S)$ des structures projectives complexes sur une surface compacte de genre g plus grand que 2 est topologiquement une cellule de dimension $12g - 12$. Nous allons le voir en décrivant deux de ses paramétrisations.

1.2 .

Une première paramétrisation, la *paramétrisation de Poincaré*, associe à une $\mathbb{CP}^1$-structure, une structure complexe et une différentielle quadratique holomorphe (pour cette structure) sur cette surface.

La structure complexe est celle induite par le développement. Cette structure complexe nous permet d'identifier holomorphiquement $\tilde{S}$ et le disque unité $\mathbf{U}$ de $\mathbf{C}$.

Or à toute immersion holomorphe de $\mathbf{U}$ dans $\mathbb{CP}^1$ est associée naturellement une différentielle quadratique holomorphe, appelée la schwarzienne de f. Cette différentielle est invariante lorsque l'on compose f avec une transformation projective de $\mathbb{CP}^1$. Réciproquement, la donnée d'une telle différentielle quadratique holomorphe détermine, à une transformation projective près, une immersion holomorphe de $\mathbf{U}$ dans $\mathbb{CP}^1$.

Nous obtenons donc une paramétrisation de $\mathbf{CP}(S)$ en associant à une $\mathbb{CP}^1$-structure, la structure complexe induite par le développement et la schwarzienne de ce même développement.

1.3 .

Une autre paramétrisation due à Thurston, associe à une lamination géodésique mesurée sur une surface hyperbolique, une $\mathbb{CP}^1$-structure. On commence par associer à une lamination géodésique mesurée sur une surface hyperbolique, une variété hyperbolique de dimension 3, un bout géométriquement fini dans le sens suivant:

Une variété hyperbolique complète de dimension 3, B, est un *bout géométriquement fini* (figure 1) si

(i) B est homéomorphe à $S \times [0, \infty[$, où S est une surface compacte.

(ii) La métrique induite sur le bord B_0 de B est à courbure -1.

(iii) Le bord de B est developpable et concave, c'est à dire que toute géodésique reliant deux points du bord est tracée sur ce bord.

Par construction, le bord d'un bout géométriquement fini est une surface hyperbolique munie d'une lamination géodésique mesurée. Réciproquement on montre [C.E.G.] qu'une lamination géodésique mesurée sur une surface hyperbolique détermine un bout.

On définit ensuite le *bord à l'infini* B_∞ de B comme en [B.G.S] en le considérant comme l'espace des demi-géodésiques complètes divergentes et minimisantes, quotienté par la relation d'équivalence: être asymptotique. Le bord à l'infini d'un bout géométriquement fini est une surface compacte homéomorphe à S. Il est naturellement muni d'une $\mathbb{CP}^1$-structure, en effet l'application développante du revêtement universel de B dans $\mathbf{H}^3$, se prolonge en une immersion du revêtement universel du bord à l'infini de B dans le bord à l'infini de $\mathbf{H}^3$ identifié comme $\mathbb{CP}^1$ avec sa structure projective.

Un théorème de Thurston (non publié) nous apprend que l'application ainsi construite, associant à une lamination géodésique mesurée un bout géométriquement fini puis la structure projective complexe sur le bord à l'infini de ce bout, est une paramétrisation. Plus tard, (3.4.) nous redémontrerons ce théorème d'une manière assez détournée.

1.4 .

Remarquons pour finir, qu'un exemple sympathique de bout géométriquement fini est obtenu en ôtant à une variété hyperbolique géométriquement finie et sans cusps son coeur de Nielsen, voir [T].

1.5 Immersions isométriques.

Soit S est une surface immergée dans $\mathbf{H}^3$, $\bar{g}$ la métrique de $\mathbf{H}^3$ de connexion de Levi-Cività $\bar{\nabla}$ et n le vecteur normal à S. On définit un 2-tenseur II sur TS, appelé *deuxième forme fondamentale* par

$$\mathrm{II}(X, Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X n, Y).$$

où X et Y appartiennent à TS. Il vérifie les propriétés suivantes:

(i) II est symétrique,

(ii) le discriminant de II par rapport à la métrique induite g vaut $k+1$, où k est la courbure de g (Equation de Gauss) ,

(iii) si enfin ∇ est la connexion de Levi-Cività de g, nous avons l'équation de Codazzi

$$\nabla_X \mathrm{II}(Y,Z) = \nabla_Y \mathrm{II}(X,Z).$$

Réciproquement (voir [Sp]), à un 2-tenseur II défini sur une surface riemanienne (S,g) et vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) est associée une immersion isométrique équivariante de (S,g) dans $\mathbf{H}^3$, dont la deuxième forme fondamentale associée est II. Par *immersion isométrique équivariante*, nous entendons une immersion isométrique f du revêtement universel $\tilde{S}$ dans $\mathbf{H}^3$ telle qu'il existe une représentation ρ du $\pi_1(S)$ dans $PSL(2,\mathbf{C})$ le groupe des isométries de $\mathbf{H}^3$, dite *représentation d'holonomie* vérifiant pour tout s de $\tilde{S}$ et g de $\pi_1(S)$

$$f(g.s) = \rho(g)f(s).$$

On définit enfin la *courbure moyenne* comme la trace de la deuxième forme fondamentale.

1.6 .

Soit toujours S une surface immergée dans $\mathbf{H}^3$, si la courbure de S est strictement supérieure à -1, S est dite *localement convexe* et la deuxième forme fondamentale est une métrique. On peut également construire un autre 2-tenseur symétrique appelé *troisième forme fondamentale* défini par

$$\mathrm{III}(X,Y) = g(\bar{\nabla}_X n, \bar{\nabla}_Y n).$$

Une interprétation géométrique de cette nouvelle métrique est la suivante:

Soit $\mathbf{R}^{3,1}$ l'espace de Minkowski muni de la métrique de signature $+++-$, l'espace hyperbolique se plonge isométriquement comme l'espace des vecteurs de norme -1, et l'espace de de Sitter comme l'espace des vecteurs de norme 1. Si S est une surface plongée dans $\mathbf{H}^3$ et N l'application à valeurs dans l'espace de de Sitter qui à un point de S associe le vecteur normal à S en ce point (vu comme un vecteur tangent à $\mathbf{H}^3$ et donc un vecteur de $\mathbf{R}^{3,1}$), nous avons

$$N_*(X) = \bar{\nabla}_X n,$$

et la troisième forme fondamentale est alors donnée par

$$\mathrm{III(X,Y)} = (\mathrm{N}_*(\mathrm{X}), \mathrm{N}_*(\mathrm{Y})).$$

Autrement dit, III est la métrique induite par N de celle de de Sitter.

1.7 .

Toujours dans ce cas localement convexe, on peut associer à une immersion isométrique équivariante f de S, une variété hyperbolique de dimension 3, homéomorphe à $S \times [0, \infty[$ dont S est le bord et que nous noterons $S(f)$. On considère en effet l'application de $\tilde{S} \times [0, \infty[$ dans $\mathbf{H}^3$ définie par

$$F(s,t) = exp(t.n(f(s)),$$

où $n(f(s))$ est le vecteur normal extérieur à $f(\tilde{S})$ en $f(s)$. Grâce à la convexité, F est une immersion. Par équivariance, la métrique hyperbolique induite sur $\tilde{S} \times \mathbf{R}$ est équivariante sous l'action du $\pi_1(S)$. Nous obtenons bien ainsi une métrique hyperbolique sur $S \times [0, \infty[$.

Cette dernière construction est liée à la construction de Thurston [E.S] associant un bout géométriquement fini à une lamination géodésique mesurée sur une surface hyperbolique, la lamination jouant le rôle d'une deuxième forme fondamentale.

On peut alors voir f comme une immersion isométrique de S dans le bord de $S(f)$.

1.8 .

Enfin, nous associons à une immersion isométrique équivariante de S dans $\mathbf{H}^3$ une structure projective complexe sur S. Une application de Gauss hyperbolique est definie de toute surface orientée de $\mathbf{H}^3$ dans la sphère $\mathbb{CP}^1$ avec sa structure conforme, vue comme le bord de $\mathbf{H}^3$ à l'infini. C'est l'application qui associe à un point de la surface la géodésique normale. Lorsque la surface est localement convexe, dans notre cas nous considèrerons $f(\tilde{S})$, cette application est une immersion. Nous associons ainsi à une immersion isométrique équivariante de S dans $\mathbf{H}^3$ une immersion équivariante de S dans $\mathbb{CP}^1$, c'est à dire une structure projective complexe.

Il est facile de vérifier que cette structure projective complexe peut également se définir comme celle obtenue canoniquement sur le bord à l'infini de $S(f)$, vu comme l'espace des demi-geodésiques divergentes de $S(f)$.

1.9 Surfaces à courbure constante dans les bouts géométriquement finis.

Dans un précédent papier [L2], nous avons étudié les surfaces à courbure constante dans les bouts géométriquement finis (voir la définition en 1.3.). Nous avons en particulier démontré le théorème suivant.

1.9.1 Théorème. *Soit B un bout géométriquement fini, alors pour tout k appartenant à $]-1, 0[$, il existe une unique surface plongée incompressible dans B à courbure constante k.*

De plus, la famille de surfaces (S_k) feuillette B (voir figure 2).

En fait la preuve du théorème est plus général et fournit également le résultat suivant:

1.9.2 THÉORÈME. *Soit f_0 une immersion isométrique équivariante d'une surface à courbure constante négative k_0, $k_0 \in]-1,0[$ et $S(f_0)$ la variété hyperbolique construite comme en 1.7.. Alors pour tout k appartenant à $[k_0, 0[$, il existe une unique surface plongée incompressible dans $S(f_0)$ à courbure constante k.*

De plus, la famille de surfaces (S_k) feuillette $S(f_0)$.

En effet, pour étendre le résultat précedent, la démonstration se reproduit à l'identique. Il faut simplement montrer en plus que l'espace des immersions isométriques équivariantes d'une surface à courbure constante est connexe ce qui découle de 2.1. Nous allons démontrer une autre propriété intéressante de ces surfaces à courbure constante:

1.9.3 LEMME. *Soit f_0 une immersion isométrique équivariante d'une surface S_{k_0} à courbure constante k_0. Soit S_1 une surface à courbure constante $0 > k_1 > k_0 > -1$ plongée isométriquement dans $S(f_0)$.*

Alors l'intégrale de la courbure moyenne de S_1 est supérieure ou égale à l'intégrale de la courbure moyenne de $f_0(S_0)$.

preuve: Nous allons tout d'abord écrire une formule de la variation de l'intégrale de la courbure moyenne. On se donne donc (f_t) une famille d'immersions d'une surface S_0 dans une variété hyperbolique telle que f_0 soit l'identité. Soit n_t le vecteur normal à la surface $S_t = f_t(S)$, on suppose de plus que

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, f_t(x) = \xi = g.n_0(f_0(x)).$$

Alors si H_t est l'intégrale de la courbure moyenne de la surface $f_t(S)$ nous avons

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, H_t = \int_{S_0} g.(2+\kappa)d\mu_0,$$

où κ est la courbure intrinsèque de la métrique induite par f_0 et $d\mu_0$ son élément d'aire.

Montrons tout d'abord comment déduire le lemme de notre formule. Nous choisissons la normale extérieure de façon à ce que la courbure moyenne soit positive. Notre formule nous dit alors que si l'on déforme une surface convexe vers l'extérieur, l'intégrale de la courbure moyenne croit.

Dès lors, si S_t est la famille de surfaces à courbure constante feuilletant l'espace compris entre S_1 et $f_0(S_0)$, l'intégrale de la courbure moyenne de ces surfaces croit. Ceci entraîne notre lemme.

Montrons notre formule. La variation du vecteur normal est donnée par

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, n_t = \nabla_\xi n_t = -grad(g). \tag{1}$$

Maintenant, l'intégrale de la courbure moyenne est obtenue en intégrant sur S la 2-forme ω_t antisymétrisant le 2-tenseur β_t sur TS défini par

$$\beta_t(u,v) = \Omega(\nabla_{u_t} n_t, v_t, n_t),$$

où l'on a noté w_t le vecteur $Tf_t(w)$, Ω la forme volume de la variété ambiante et ∇ la connexion de Levi-Civita de la variété ambiante.

Ensuite nous avons

$$\frac{d}{dt}\beta_t(u,v) = \Omega(\nabla_\xi \nabla_{u_t} n_t, v_t, n_t) + \Omega(\nabla_{u_t} n_t, \nabla_\xi v_t, n_t) + \Omega(\nabla_{u_t} n_t, v, \nabla_\xi n_t)$$

Utilisons (1), le fait que $[\xi, v_t]$ est nul et notons R le tenseur de courbure de la variété ambiante, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mid_{t=0} \beta_t(u,v) =& \Omega(R(\xi,u)n_0, v, n_0) + \Omega(\nabla_u \nabla_\xi n_0, v, n_0) + \Omega(\nabla_u n_0, \nabla_v \xi, n_0)\\ =& g.\Omega(u,v,n_0) - \Omega(\nabla_u grad(g), v, n_0) + g\Omega(\nabla_u n_0, \nabla_v n_0, n_0).\end{aligned}$$

Nous reconnaissons dans le deuxième terme la différentielle extérieure de la 1-forme

$$\sigma(u) = -\Omega(grad(g), u, n_0).$$

Par ailleurs le premier terme est $g.d\mu_0$ et le dernier est, d'après l'équation de Gauss, $g(1+\kappa)d\mu_0$.

Nous obtenons alors notre formule puisque

$$\frac{d}{dt}\mid_{t=0} H_t = \int_{S_0} \frac{d}{dt}\mid_{t=0} \omega_t.$$

■

1.10 Limites d'immersions isométriques.

Nous allons rappeler ici un résultat sur les suites d'immersions isométriques d'une surface dans une variété de dimension 3. Ces résultats sont extraits de [L1].

1.10.1 Théorème. *Soit (f_n) une suite d'immersions isométriques d'une surface S à courbure supérieure à k_0, dans une variété M de dimension 3 à courbure inférieure à k_0 convergeant de façon C^0 sur tout compact vers une application f_0.*

Si l'intégrale de la courbure moyenne des f_n est uniformément majorée, alors les f_n converge de façon C^∞ sur tout compact et en particulier f_0 est une immersion isométrique.

2.1 .

Nous nous proposons dans cette section d'étudier l'espace des immersions isométriques équivariantes d'une surface de genre g à courbure constante k, $k \in]-1, 0[$, dans l'espace hyperbolique de dimension 3. Soit donc j_0 la structure conforme de S, on notera alors $\mathcal{I}(j_0, k)$ l'espace des immersions isométriques équivariantes de S munie de la métrique conforme à j_0 et de courbure constante k.

Nous nous proposons de démontrer les deux propositions suivantes

2.1.1 Proposition. *L'application qui à un élément de $\mathcal{I}(j_0, k)$ associe la structure conforme déterminé par la deuxième forme fondamentale est un homéomorphisme de $\mathcal{I}(j_0, k)$ dans $\mathcal{T}(S)$ l'espace de Teichmüller de S.*

2.1.2 Proposition. *L'application qui à un élément de $\mathcal{I}(j_0, k)$ associe la structure conforme déterminé par la troisième forme fondamentale est une homéomorphisme de $\mathcal{I}(j_0, k)$ dans $\mathcal{T}(S)$ l'espace de Teichmüller de S.*

Nous verrons également que la troisième forme fondamentale vérifient des propriétés intéressantes (voir 2.3.).

2.2 Nouvelle formulation.

Nous allons reformuler notre problème de manière intrinsèque sur S, en éliminant le facteur k pour simplifier les démonstrations. En bref, au lieu d'étudier les deuxièmes formes fondamentales nous étudierons leurs structure complexes grâce à la

2.2.1 Proposition. *Soit S une surface de Riemann de structure presque complexe J_0, dont la métrique hyperbolique associée est g_0 de connexion de Levi-Cività ∇. Un 2-tenseur* II *vérifie les équations de Gauss-Codazzi pour la métrique $-\frac{1}{k}g_0$ à courbure constante k si et seulement si il s'écrit*

$$\mathrm{II}(X, Y) = -\frac{\sqrt{k+1}}{k} g_0(J_0 J X, Y),$$

où J est la structure complexe determinée par II *et vérifie*

$$(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X.$$

preuve: Un tout petit peu d'algèbre linéaire. ∎

On construit alors le fibré $E \to S$ dont la fibre en chaque point s de S est l'espace des endomorphismes de T_sS de carré -1. Cet espace E_s s'identifie canoniquement au plan hyperbolique réel. Par ailleurs, ce fibré est muni d'une connexion qui se déduit de la Levi-Civitá et que nous noterons également ∇. Les sections de E sont bien sûr les structures complexes de S. On est donc amené à s'intéresser à l'espace $\mathcal{J}_0$ des sections qui vérifient

$$(*) \qquad (\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X.$$

Nous venons de voir que $\mathcal{J}_0$ s'identifie naturellemnent à $\mathcal{I}(j_0, k)$ par 2.2.. L'identification associant à un élément de $\mathcal{I}(j_0, k)$ la structure complexe determinée par la deuxième forme fondamentale.

Remarquons que l'on pourrait définir cet espace de sections d'une autre manière. La connexion nous permet de définir de manière twistorielle sur E une structure presque complexe: Soit J un point de E, l'espace vertical est l'espace des endomorphismes qui anticommutent à J, on le munit de la structure complexe donnée par la multiplication à gauche par J; l'espace horizontal identifié avec l'espace tangent à S est muni de la structure complexe définie par J elle-même. Il est alors facile de montrer que $\mathcal{J}_0$ est l'espace des sections dont le graphe est une courbe pseudo-holomorphe de E. Cette interprétation ne nous sera pas utile par la suite.

Une autre interprétation de cet espace est donnée par la proposition suivante:

2.2.2 Proposition. *L'identité de (S, J) dans (S, g_0) est harmonique si et seulement si J appartient à $\mathcal{J}_0$.*

preuve: Un calcul immédiat. Dans le cas où l'espace ambient est l'espace Euclidien (ce qui ne change pas grand chose), cette remarque avait dejà été faite par Hildebrant (voir [J]). ∎

Cette interprétation va nous permettre d'identifier $\mathcal{J}_0$ avec l'espace de Teichmüller de S de deux manières différentes.

2.3 Applications dans l'espace de Teichmüller.

Nous avons tout d'abord la proposition suivante

2.3.1 Proposition. *L'application naturelle ψ_1 de $\mathcal{J}_0$ dans $\mathcal{T}(S)$, l'espace de Teichmüller de S, qui à un point de $\mathcal{J}_0$ associe la structure complexe définie par cette section, est un homéomorphisme.*

preuve: Ceci, au su de la proposition 2.2., n'est rien d'autre qu'une reformulation des résultats de Sampson [S] ou Schoen-Yau [S.Y] sur l'existence et l'unicité de difféomorphismes harmoniques entre surfaces hyperboliques. ∎

Nous venons donc de montrer la proposition 2.1. .

Une autre application à valeurs dans l'espace de Teichmüller va s'avérer intéressante. A chaque élément J de $\mathcal{J}_0$ on peut associer la métrique g_J définie par

$$g_J(X,Y) = g_0(JX, JY).$$

Cette métrique est dans l'identification de $\mathcal{I}(j_0, k)$ avec J_0, la troisième forme fondamentale à un facteur constant près. Remarquons par ailleurs que la structure complexe de g_J est JJ_0J, c'est à dire la symétrique de J_0 par rapport à J, quand on a identifié l'espace des endomorphismes de carré -1 du plan avec le plan hyperbolique.

Cette métrique a les deux intéressantes propriétés de symétrie suivantes

2.3.2 Proposition.

(*i*) *La métrique g_J est hyperbolique,*

(*ii*) *si ∇^J est la connexion de Levi-Cività de g_J, on a*

$$(\nabla^J_X J)Y = (\nabla^J_Y J)X.$$

preuve: La connexion ∇^J définie par

$$\nabla^J_X Y = -J\nabla_X(JY) = \nabla_X Y - J\nabla_X J(Y),$$

est clairement métrique pour g_J. Comme elle est sans torsion par $(*)$ c'est la connexion de Levi-Cività pour g_J. Autrement dit, ∇^J est la connexion induite de ∇ par J considérée comme une application de TS dans lui même. Comme g_J est la métrique induite, et le tenseur de courbure est également induit, on en déduit (i).

Enfin, en remarquant que ∇J anticommute avec J, on obtient immédiatement (ii). ∎

La proposition 2.1. n'est alors rien d'autre que la

2.3.3 Proposition. *L'application ψ_2 de $\mathcal{J}_0$ dans $\mathcal{T}(S)$ qui a J associe la structure complexe determinée par g_J est un homéomorphisme.*

preuve: Pour cela, nous allons nous servir d'un argument de Trombä utilisant la fonctionelle de Dirichlet.

Si J est une section de E, l'énergie de l'identité de (S, J) dans (S, g_0) est, si ω_0 est la forme volume de g_0

$$\int_S \text{trace } (J_0 J)\omega_0.$$

Grâce à un point j_0 de $\mathcal{T}(S)$, représenté par une métrique hyperbolique g_0 sur S, nous pouvons donc définir une fonction e_{j_0} sur $\mathcal{T}(S)$. Sa valeur pour une surface

de Riemann (S, J) est le minimum de l'énergie des applications de (S, J) dans (S, g_0). En utilisant l'isomorphisme ψ_1 associé à g_0, nous avons donc

$$e_{j_0}(j) = \int_S \text{trace } (J_0 \psi_1^{-1}(j))\omega_0.$$

D'après Trombä [Tr], cette fonction est propre et convexe respectivement à la métrique de Weil-Petersson.

Soit donc $j_0 = \psi_1(J_0)$ et j_1 un autre point de l'espace de Teichmüller. Considérons alors la fonction

$$f = e_{j_0} + e_{j_1}.$$

Cette fonction est convexe et propre, elle admet donc un unique minimum que nous noterons j_2.

Géométriquement ce minimum correspond à l'unique surface minimale dans $(S, j_0) \times (S, j_1)$. Les applications harmoniques correspondantes étant les projections.

Nous allons maintenant montrer que $\psi_2(\psi_1^{-1}(j_2)) = j_1$. Cela suffit à démontrer notre résultat.

Soit donc (S_i, J_i) des surfaces de Riemann représentant j_i et g_i leurs métriques hyperboliques, $i \in \{0, 1, 2\}$.

Nous savons alors qu'il existe des uniques difféomorphismes f_i, $i \in \{0, 1\}$ de (S_2, J_2) dans (S_i, g_i). Utilisons les pour identifier nos surfaces S_i à S_0 sans changer les notations par ailleurs. L'élément d'aire ω_1 de g_1 vaut $\lambda\omega_0$, pour une certaine fonction λ. Le fait que j_2 minimise f entraîne que J_2 minimise parmi toutes les sections de E la fonctionelle

$$F(J) = \int_{S_0} \text{trace } (JJ_0)\omega_0 + \int_{S_0} \text{trace } (JJ_1)\lambda\omega_0.$$

Nous en déduisons donc que

$$[J_2, J_0] = -\lambda[J_2, J_1]. \tag{1}$$

Rappelons maintenant que si l'identité de (S, J) dans (S, g) est harmonique, il lui est naturellement associé la différentielle quadratique holomorphe

$$\omega(J[J_g, J]., .)$$

où ω est la forme volume de g et J_g sa structure complexe. Nous allons utiliser le résultat suivant de Sampson [S]: fixons un point (S, J) de l'espace de Teichmüller, un autre point de l'espace de Teichmüller détermine un unique difféomorphisme harmonique de (S, J) dans (S, g) où g est la métrique hyperbolique associée à notre deuxième point. Ce difféomorphisme détermine à son tour une différentielle

quadratique holomorphe. L'application ainsi construite qui va de l'espace de Teichmüller dans l'espace des différentielles quadratiques holomorphes est alors injective.

Or dans notre cas, l'équation (1) entraîne que la différentielle quadratique holomorphe associée à g_1 est la même que celle associée à la métrique $g(J_2, J_2)$ dont nous avons vu en 2.3. qu'elle était hyperbolique. En particulier J_1 et $J_2 J_0 J_2$ sont conformes ce qui prouve notre résultat. ∎

Nous pouvons énoncer ce résultat sous une autre forme. Rappelons tout d'abord qu'à un difféomorphime f entre deux variétés riemaniennes (M_1, g_1) et (M_2, g_2) est associé un morphisme isométrique des fibrés tangents. En effet, il existe un unique opérateur symétrique B de TM_1 tel que

$$f^* g_2(.,.) = g_1(B.,B.)$$

Le morphisme isométrique l'on considère, est le morphisme $Tf \circ B^{-1}$. Nous l'appelerons morphisme isométrique canonique.

2.3.4 Corollaire. *Soit (S_1, g_1) et (S_2, g_2) deux surfaces hyperboliques de même genre, il existe alors un unique difféomorphisme F de S_1 dans S_2 qui préserve les aires, et tel que le morphisme isométrique canonique associé préserve la connexion.*

Comme nous l'avons déjà dit, le graphe de ce difféomorphisme est l'unique surface minimale dans le produit de nos surfaces. Le point essentiel de notre démonstration est de démontrer que le difféomorphisme défini par ce graphe préserve les aires.

Nous dirons que deux immersions isométriques sont équivalentes si elles ont conjugées par un difféomorphisme isotope à l'identité. Plus précisemment, deux immersions isométriques équivariantes f_1 et f_2 de $\tilde{S}$ dans $\mathbf{H}^3$ sont équivalentes si il existe un difféomorphisme ϕ isotope à l'identité et A une isométrie de $\mathbf{H}^3$ tels que

$$f_1 \circ \tilde{\phi} = A \circ f_2,$$

où $\tilde{\phi}$ désigne le difféomorphisme de $\tilde{S}$ relevant ϕ.

Nous considérons maintenant l'espace des immersions équivariantes de $\tilde{S}$ dans $\mathbf{H}^3$, telles que la métrique induite est à courbure constante k, $k \in]-1, 0[$ et $\mathcal{I}(k)$ l'espace quotient par la relation d'équivalence définie précédemment.

Une application naturelle de $\mathcal{I}(k)$ dans $\mathcal{T}(S)$, l'espace de Teichmuller de S associe à une telle immersion, la structure conforme j_0 induite par la métrique. La fibre de cette application est avec les notations de la section précédente l'espace $\mathcal{I}(j_0, k)$, que nous avons identifié en 2.1. et 2.1. à $\mathcal{T}(S)$.

L'espace $\mathcal{I}(k)$ est ainsi identifié de deux manières différentes avec $\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S)$. Notre but dans cette section est de démontrer le

3.0.1 Théorème. *Pour tout $k \in]-1, 0[$, l'application de $\mathcal{I}(k)$ dans $\mathbf{CP}(S)$, qui associe à une immersion f la structure projective déterminée par l'application hyperbolique de Gauss (1.8.) est un homéomorphisme.*

Nous obtenons ainsi, en faisant varier k, deux familles à un paramètre de paramétrisations de l'espace des structures projectives sur S par $\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S)$.

Le théorème 1.9. nous permet de construire une nouvelle application entre espaces d'immersions isométriques équivariantes. Soit en effet $0 > k_2 > k_1 > -1$, et f_1 une immersion isométrique équivariante d'une surface à courbure k_1. Le théorème 1.9. nous fournit une surface à courbure constante k_2 immergée isométriquement dans $S(f_1)$, et en particulier une immersion isométrique équivariante f_2 dune surface à courbure constante k_2.

Ainsi, nous construisons une application ψ_{k_1,k_2} de $\mathcal{I}(k_1)$ dans $\mathcal{I}(k_2)$. Nous allons montrer

3.0.2 Proposition. *L'application ψ_{k_1,k_2} de $\mathcal{I}(k_1)$ et $\mathcal{I}(k_2)$ qui à une immersion isométrique équivariante f_1 d'une surface à courbure constante k_1 associe la surface à courbure constante k_2 de $S(f_1)$ est un homéomorphisme.*

preuve: Pour cela, il nous suffit de montrer que ψ_{k_1,k_2} vérifie les propriétés suivantes

(i) ψ_{k_1,k_2} est injective,

(ii) ψ_{k_1,k_2} est propre.

En effet d'après l'invariance du domaine ψ_{k_1,k_2} sera un homéomorphisme.

Montrons (i). Soient donc f et $\bar{f}$ deux éléments de $\mathcal{I}(k_1)$ ayant la même image par ψ_{k_1,k_2}. Soient alors S_k et $\bar{S}_k$ les surfaces à courbure constante $k > k_1$ dans les variétés $S(f)$ et $S(\bar{f})$, obtenues par le théorème 1.9.

Nous nous intéressons alors à l'ensemble I des reéls k appartenant à $[k_1, 0[$ tels que les surfaces S_k et $\bar{S}_k$ soient isométriques par une isométrie qui préserve les deuxième formes fondamentales. Remarquons que cette dernière condition entraîne que les voisinages tubulaires des surfaces S_k et $\bar{S}_k$ sont isométriques. L'unicité contenue dans le théorème 1.9. nous assure alors que I est ouvert. Comme I est trivialement fermé, nous en déduisons que I est tout l'intervalle $[k_1, 0[$, c'est à dire que $S(f)$ et $\bar{S}(f)$ sont isométriques.

Montrons (ii). On se donne donc (a_n) une suite d'éléments de $\mathcal{I}(k_1)$ telle que la suite $(b_n = \psi_{k_1,k_2}(a_n))$ d'éléments de $\mathcal{I}(k_2)$ converge. Chaque élément a_n est representé par une immersion isométrique équivariante f_n d'une surface à courbure constante k_1. De même b_n est representé par une immersion isométrique g_n d'une surface Σ_n à courbure constante k_2 dans $S(f_n)$.

Remarquons tout d'abord que la projection convexe de $g_n(\Sigma_n)$ sur $f_n(S_n)$ vue comme le bord de $S(f_n)$ est contractante ([B.G.S]). Dès lors, puisque la famille (Σ_n) converge, son rayon d'injectivité est minoré et le rayon d'injectivité de (S_n) est également minoré. Nous pouvons donc extraire de (S_n) une sous-suite convergente.

Il nous reste donc à montrer que l'on peut extraire de (f_n) une sous-suite convergente. D'après le théorème D de [L1], il nous suffit de montrer que l'intégrale de la courbure moyenne de $(f_n(S_n))$ est uniformément bornée. Or d'après le lemme 1.9. cette intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la courbure moyenne de $(g_n(\Sigma_n))$ qui est bornée puisque (b_n) converge.

Nous avons donc montré que l'on peut extraire de (a_n) une sous-suite convergente. ∎

3.1 Preuves du théorème 3.0..

Nous allons donner deux preuves de ce résultat, la première utilise la paramétrisation de Thurston et la deuxième en est indépendante. Rappelons que l'un de nos but est de redémontrer ce résultat de Thurston

La première démonstration découle donc du théorème 1.9. et de la paramétrisation de Thurston. En effet, notons ψ_k l'application de de $\mathcal{I}(k)$ dans $\mathbf{CP}(S)$, qui associe à une immersion f la structure projective déterminée par l'application hyperbolique de Gauss.

Nous pouvons produire un inverse de cette application. Soit en effet $\mathcal{C}$ une structure projective complexe, on commence par lui associer un bout géométriquement fini obtenu grâce à la paramétrisation de Thurston. Soit alors S_k la surface à courbure constante k plongée et incompressible dans ce bout construite grâce au théorème 1.9. . L'image de cette surface par ψ_k est alors par construction la structure projective complexe $\mathcal{C}$

Nous allons nous efforcer maintenant de produire une preuve indépendante du résultat de Thurston. Nous allons pour cela démontrer que

(i) L'application ψ_k est un homéomorphisme local,

(ii) L'application ψ_k est propre.

En effet, ψ_k sera alors un revêtement et donc un homéomorphisme puisque $\mathcal{I}(k)$ est connexe et $\mathbf{CP}(S)$ simplement connexe.

3.2 .

Montrons tout d'abord (i).

Soient donc a et $\bar{a}$ deux éléments de $\mathcal{I}(k)$ ayant la même image par ψ_k. L'élément a est représenté par une immersion isométrique équivariante f d'une surface à courbure constante k. De même, $\bar{a}$ est représenté par $\bar{f}$ immersion isométrique équivariante d'une surface $\bar{S}$.

A l'aide de la proposition 3.0.. on peut supposer que$S$ est immergée par f isométriquement dans une variété $S(g)$ où g est une immersion isométrique équivariante d'une surface à courbure constante k_0 où $0 > k > k_0 > -1$.

Puisque a et $\bar{a}$ ont la même image par ψ_k, nous en déduisons en particulier que les représentations du π_1 sont identiques et que en particulier si $\bar{a}$ est suffisamment proche de a, $\bar{a}$ est représentée par un plongement isométrique à valeurs dans $S(g)$. Dès lors, par unicité de la surface à courbure constante k plongée dans $S(g)$, nous déduisons que a et $\bar{a}$ sont égaux.

3.3 .

Montrons (ii). On se donne donc une suite (a_n) d'éléments de $\mathcal{I}(k)$, telle que la suite d'éléments $(c_n = \psi_k(a_n))$ de $\mathbf{CP}(S)$ converge.

Rappelons que c_n est représenté par une surface de Riemann Σ_n et une immersion holomorphe équivariante g_n de $\tilde{\Sigma}_n$ dans $\mathbb{CP}^1$ (On notera $\tilde{S}$ le revêtement universel d'une surface S). Identifions $\tilde{\Sigma}_n$ avec U le disque unité de $\mathbf{C}$. Le fait que (c_n) converge entraîne que pour tout compact K de U, il existe un entier N tel que, si z appartient à K et n est quelconque

$$(*) \qquad \sharp g_n^{-1}\{g_n(z)\} \cap K < N,$$

c'est à dire le cardinal de tout sous-ensemble de K ayant la même image par g_n est borné.

Par ailleurs, a_n est représenté par une immersion isométrique équivariante f_n^k d'une surface S_n^k à courbure constante k. A cette immersion isométrique est associée une variété hyperbolique $S(f_n^k)$ dont le bord à l'infini est Σ_n. De plus, d'après le théorème 1.9. $S(f_n^k)$ est feuilletée par des surfaces à courbure constante $0 > \bar{k} > k$. Ces surfaces $S_n^{\bar{k}}$ à courbure constante représentent l'élément $\psi_{k,\bar{k}}(a_n)$

et on notera $f_n^{\bar{k}}$ l'immersion isométrique équivariante associée. Dans [L2], nous avons de plus montré que $(H(\bar{k},n))$, la borne supérieure de la courbure moyenne de $S_n^{\bar{k}}$, tendait vers 2, quand $\bar{k}$ tendait vers 0. Nous avons également montré que $H(k,n)$ majorait le rapport de conformalité de l'application hyperbolique de Gauss $G(n,\bar{k})$ de $S_n^{\bar{k}}$ dans Σ_n

Remarquons maintenant que pour que l'on puisse extraire de (a_n) une sous-suite convergente, il suffit que $(H(k,n))$ soit borné uniformément pour n. En effet, (Σ_n) convergeant et puisque $H(k,n)$ majore la distance de Teichmuller de S_n^k et Σ_n nous pourrons extraire de S_n^k une sous-suite convergente. Par ailleurs le même raisonnement que pour (ii) de 3.0. montre que l'on peut extraire de (f_n) une sous-suite convergente.

Nous allons maintenant raisonner par l'absurde et supposer que (a_n) n'admette pas de sous-suite convergente. Nous en déduisons la même chose pour $\psi_{k,\bar{k}}(a_n)$. Et en particulier, il existe une sous-suite telle que pour tout $0 > \bar{k} > k$, la suite $(H(\bar{k},n))$ tende vers l'infini.

Nous pouvons alors construire une suite (k_n) tendant vers 0, telle que $(H_n = H(k_n,n))$ vaille 5 (la seule chose que nous demandons à 5 est d'être supérieur à 2 ...). On relève alors l'application hyperbolique de Gauss en une application $G_n = G(n,k_n)$ entre $\tilde{S}_n = \tilde{S}_n^{k_n}$ et $\tilde{\Sigma}_n$. Ces applications sont des homéomorphismes H_n-quasi-conformes et l'on peut donc extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers un homéomorphisme quasi-conforme G_0. On a ici identifié $\tilde{S}_n$ avec U en utilisant la représentation conforme

Soit alors x_n un point de $\tilde{S}_n$ où la courbure moyenne atteint son maximum (c'est à dire 5), on peut supposer que (x_n) converge dans U. On considère alors la boule B de rayon 1 de centre x_n pour la métrique hyperbolique sur U. Puisque (G_n) converge, on en déduit que $(G_n(B))$ reste toujours inclus dans un même compact K.

Rappelons par ailleurs que $\tilde{S}_n$ (et donc B) s'immerge isométriquement dans $\mathbf{H}^3$ par $f_n = f_n^{k_n}$. Soit alors γ_n l'application hyperbolique de Gauss de la surface $f_n(B)$ dans $\mathbb{CP}^1$. Par construction

$$\gamma_n \circ f_n = g_n \circ G_n.$$

Notre remarque initiale $(*)$ sur la suite (c_n) se traduit par la propriété $(**)$:

Il existe un entier N tel le nombre de points de $f_n(B)$ ayant la même image par γ_n est majoré par N.

Or la courbure de la métrique de S_n converge vers 0 et en particulier la métrique induite sur B converge vers la métrique euclidienne sur le plan. Par ailleurs, la courbure moyenne de f_n étant uniformément majorée par 5. La suite d'immersions isométriques (f_n) converge de façon C^∞ sur tout compact vers une immersion f_0 isométrique du plan euclidien dans $\mathbf{H}^3$.

Rappelons maintenant qu'il n'y a que deux types d'immersions isométriques du plan euclidien dans $\mathbf{H}^3$ (tout deux à courbure moyenne constante), d'une

part celui donné par les horosphères (et la courbure moyenne est alors 2), d'autre part celui donné par les revêtements universels des bord des tubes à distance fixée d'une géodésique.

Notre courbure moyenne valant 5, nous sommes dans ce dernier cas qui contredit la propriété $(**)$.

3.4 Lien avec les paramétrisations de Thurston et Poincaré .

En utilisant les idées contenues dans les paragraphes précédents, nous allons maintenant esquisser la preuve que la paramétrisation de Thurston est une bijection dans le cas des surfaces compactes. Il nous faut pour cela produire un inverse de l'application construite en 1.3.. Soit donc τ une $\mathbb{CP}^1$-structure, dáprès le théorème 3.0., nous pouvons trouver une surface S_k à courbure constante k et une immersion isométrique f_k de cette surface dont la $\mathbb{CP}^1$-structure associée est τ. Soit alors $W_k = S(f_k)$ la variété de dimension 3 associée à f_k (1.7.), dáprès 3.0. , si $k_1 < k_2$ nous avons

$$(*). \qquad W_{k_1} \subset W_{k_2}$$

Nous allons montrer que quand k tend vers -1, W_k converge vers un bout géométriquement fini. En effet la $\mathbb{CP}^1$-structure associée à ce bout sera τ.

Remarquons tout d'abord que la suite des métriques des surfaces S_k converge. En effet, d'après (*) et en utilisant la projection convexe on construit une application contractante de S_{k_2} dans S_{k_1} si $k_1 < k_2$. En particulier, le diamètre de la famille S_k est uniformément borné, nous pouvons donc extraire de toute sous-suite une sous-suite convergeant vers une surface S_{-1} à courbure -1 (le diamètre est une fonction propre sur l'espace de Teichmüller).

Supposons maintenant l'existence de deux sous-suites convergeant vers deux surfaces différentes S'_{-1} et S_{-1}. D'après ce que nous venons de dire, nous avons une application contractante de S'_{-1} dans S_{-1}. Ces surfaces sont donc isométriques puisqu'elles ont la même aire par Gauss-Bonnet.

Le bord de $W_0 = \bigcup_k W_k$ est donc isométrique à une surface à courbure -1. On montre ensuite que W_0 est un bout géométriquement fini.

Nous allons tracer un petit dessin (voir figure 3) explicitant les liens entre les differ'entes paramétrisations. Fixons donc une $\mathbb{CP}^1$-structure τ. Grâce à la paramétrisation de Thurston, nous pouvons lui associer un point de l'espace de Teichmüller j_{-1} et une lamination géodésique mesurée (Σ, μ). Avec la paramétrisation de Poincaré, nous obtenons un autre point de l'espace de Teichmüller j_0 et une différentielle quadratique holomorphe A. Avec nos paramétrisations, nous obtenons une paire de points $(j_k, J_k$ dépendant d'un paramètre k dans $]0, -1[$. Lorsque k tend vers 0, j_k et J_k tendent vers j_0. Lorsque k tend vers -1, j_k tend vers j_{-1}. En se fatiguant plus et en utilisant les résultats de [L3], dans le cas non fuchsien, on peut montrer que J_k tend vers le point à l'infini de l'espace de Teichmüller défini par la lamination géodésique mesurée (Σ, μ). Par contre, nous

ne savons pas interpréter la quadratique différentielle holomorphe, bien qu'il soit vraisemblable quelle soit liée au vecteur tangent de la courbe j_k en j_0.

unif5

Il serait sans doute intéressant de comprendre la géométrie des courbes ainsi obtenues.

[B.G.S] W.Ballman, M.Gromov, V.Schroeder, *Manifolds of non-positive curvature,* Birkhauser studies (1985)

[C.E.G.] R.D.Canary, D.B.A.Epstein, P.Green, *Notes on notes of Thurston,* in "Analytical and geometric aspects of hyperbolic spaces," London Mathematical Society lecture Notes 111, (D.B.A.Epstein ed.), Cambridge University Press, Cambridge (1987), pp.3-92

[E.O] P.Eberlein and B.O'Neill, *Visibility manifolds,* Pac. J. Math. 46 (1976) 43-110

[E.S] J.Eells and J.H.Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds,* Amer. J. Math. 86 (1964) 109-160

[G] M.Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in almost complex manifolds-*, Invent. Math. 82, (1985), pp. 307-347

[Go1] W.M.Goldman, *Geometric structures on manifolds and varieties of representations.,* Contemporary Mathematics, vol 74 (1988), 169-198

[Go2] W.M.Goldman, *Projective structures with Fuchsian holonomy.,* J. Diff. Geo. vol 25 (1987) 297-326

[J] J.Jost, *Harmonic maps between surfaces,* Lecture notes in Mathematics No 1062

[L1] F.Labourie, *Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudo-holomorphes,* Jour. of Diff. Geom.

[L2] F.Labourie, *Problème de Minkowski et surfaces à courbure constante dans les variétés hyperboliques,* preprint

[L3] F.Labourie, *Surfaces localement convexes dans l'espace hyperbolique et la compactification de l'espace de Teichmüller,* en préparation

[L4] F.Labourie, *Métriques prescrites sur le bord des variétés hyperboliques convexes compactes de dimension 3,* en préparation

[S] J.H.Sampson, *some properties and applications of harmonic mappings,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4 (1978) 211-228

[S.Y] R.Schoen, S.T.Yau, *On univalent harmonic maps between surfaces,* Invent. Math. 44 (1978) pp 265-278.

[Sp] M.Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry* , - Publish or Perish, Boston (1975).

[T] W.Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds,* ch.8, mimeographic notes

[Tr] A.J.Trombä, *Dirichlet's energy and the Nielsen realization problem,* preprint, Max Planck Inst. ,1987.

François Labourie
Topologie et Dynamique
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay (Cedex)