

Formules de Verlinde pour les groupes simplement connexes et géométrie symplectique

Jean-Michel Bismut François Labourie

October 14, 1997

Résumé : L'objet de la note est d'annoncer une démonstration des formules de Verlinde pour les groupes simplement connexes, par des méthodes de géométrie symplectique. On étend ainsi aux groupes de Lie généraux des résultats de Jeffrey-Kirwan obtenus pour $SU(n)$.

Abstract : We announce a proof of the Verlinde formulas for arbitrary simply connected groups, by methods of symplectic geometry. Our results extend the results obtained by Jeffrey-Kirwan in the case of $SU(n)$.

1 Introduction

Soit $g \geq 0$, soit Σ une surface de Riemann de genre g (munie éventuellement de points marqués $x_1, \dots, x_s$). Soit G un groupe de Lie compact simple et simplement connexe. Soit M_G l'espace des modules des G fibrés stables sur Σ (munis de structures paraboliques en $x_1, \dots, x_s$). Alors M_G est muni naturellement d'un fibré en droites canonique L . Les formules de Verlinde [11] prédisent la dimension de $H^0(M_G, L^p)$, pour $p \in \mathbf{N}$. Faltings [4] identifie $H^0(M_G, L^p)$ à l'espace des blocs conformes [10] et, à partir des règles de fusion, en déduit les formules de Verlinde pour A, B, C, D, G_2 . Le cas $G = SU(n)$ a été traité par Beauville et Laszlo [2]. Dans [1], Beauville obtient les formules de Verlinde pour A, B, C et D à partir des règles de fusion. Sorger [9] a annoncé une preuve des formules de Verlinde pour tous les groupes.

La version symplectique du problème évoqué plus haut est la suivante. Soient $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_s \subset G$ des orbites adjointes de G . Soit R l'espace compact des représentations $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow G$ telles que si c_i est un petit cercle entourant x_i , alors $\rho(c_i) \in \mathcal{O}_i$. Pour un choix générique de $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_s$, R est un orbifold, qui porte un orbifold-fibré L hermitien, muni d'une connexion ∇^L dont la courbure est la forme symplectique canonique σ de R .

Le Théorème de Riemann-Roch-Kawasaki [7] calcule l'indice d'un opérateur de Dirac bien choisi $D_{p,+}$ sur R à l'aide d'intégrales de classe de cohomologie sur les strates de R .

Dans [12], Witten a calculé le volume symplectique de R . D'autre part quand (M, σ) est une variété symplectique munie d'une action de groupe et d'une application moment, les formules de Jeffrey-Kirwan [5] expriment les intégrales de classes caractéristiques sur les réductions symplectiques de Marsden-Weinstein à l'aide d'actions d'opérateurs différentiels sur le volume symplectique des fibres. Dans [6], Jeffrey et Kirwan ont considéré le cas où $G = SU(n)$, avec un point marqué d'holonomie centrale, de telle sorte que R est une variété compacte C^∞ . Elles ont montré l'applicabilité de la théorie de l'application moment. Des techniques de résidus non triviales leur permettent de montrer que la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch est équivalente à la formule de Verlinde.

Nous nous proposons d'étendre les résultats de Jeffrey-Kirwan [6] à tous les groupes G . Nous montrons que quand R est un orbifold, pour $p \in \mathbf{Z}$ de module assez grand, l'indice de l'opérateur de Dirac considéré plus haut est donné par les formules de Verlinde. On étend ce résultat au cas général par un argument de perturbation. Pour $G \neq SU(n)$, R n'est en général pas C^∞ . Les strates de R sont des espaces de modules pour des centralisateurs $Z(u) \subset G$ d'éléments $u \in G$. En général $Z(u)$ est connexe mais non simplement connexe. On peut encore utiliser, strate par strate, les formules de Witten [12] et des techniques à la Jeffrey-Kirwan [5]. Les preuves détaillées sont développées dans [3].

2 L'orbifold M_G

Soit G un groupe de Lie compact connexe, simplement connexe et simple. Soit T un tore maximal dans G . Soit $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T . Soit $R \subset \mathfrak{t}^*$ le système de racines de G , soit $CR \subset \mathfrak{t}$ le système de coracines correspondant. Soit $\overline{R} \subset \mathfrak{t}^*$, $\overline{CR} \subset \mathfrak{t}$ les réseaux engendrés par R et R^* . Soit $\Lambda = \overline{CR}^*$ le

réseau des poids. Soit W le groupe de Weyl de G . Soit R_+ un système de racines positives, soit $K \subset \mathfrak{t}$ la chambre de Weyl correspondante, soit $P \subset K$ l'alcove associée d'adhérence contenant 0. Si $\alpha \in R$, soit $h_\alpha \in CR$ la coracine correspondante. Soit $\langle, \rangle$ le produit scalaire W -invariant sur $\mathfrak{t}$, tel que si h_α est une coracine courte, $\|h_\alpha\|^2 = 2$. On identifie $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}^*$ par le produit scalaire $\langle, \rangle$. Alors

$$(1) \quad \overline{CR} \subset \overline{R} \cap \overline{R}^* \subset \Lambda.$$

On a

$$(2) \quad \text{Vol}(T)^2 = \left| \frac{\Lambda}{\overline{CR}} \right|$$

Proposition 2.1 *Soit $q \in \mathbf{N}^*$. Soit $f : \frac{\Lambda}{qR^*} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction W -invariante. Alors*

$$(3) \quad \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda/q\overline{R}^* \\ \sigma(\lambda) \neq 0}} f(\lambda) = \frac{|W|}{|Z(G)|} \sum_{\lambda \in qP \cap \Lambda} f(\lambda)$$

Soit $G' = G/Z(G)$. Alors $T' = \mathfrak{t}/\overline{R}^*$ est un tore maximal dans G' .

Définition 2.2 *Soit $C \subset \mathfrak{t}$ l'ensemble des $u \in \mathfrak{t}$ tels que $\{\alpha \in R, \langle \alpha, u \rangle \in \mathbf{Z}\}$ engendre $\mathfrak{t}^*$.*

Si $u \in G'$, soit $Z(u) \subset G$ le centralisateur de G . Alors $Z(u)$ est un sous-groupe de Lie connexe de G . Si $u \in T'$, on pose $W(u) = \{u \in W, wu = u\}$.

Proposition 2.3 *Si $u \in T'$, le système de racines R_u de $Z(u)$ est donné par*

$$(4) \quad R_u = \{\alpha \in R, \langle \alpha, u \rangle \in \mathbf{Z}\},$$

et $R_{u,+} = R_u \cap R_+$ est un système de racines positives pour $Z(u)$. Le groupe de Weyl W_u de $Z(u)$ est donné par

$$(5) \quad W_u = W(u).$$

Enfin

$$(6) \quad C/\overline{R}^* = \{u \in T'; Z(u) \text{ est semi-simple.}\}$$

Soient $t_1, \dots, t_s$ des éléments réguliers de t . Soient $\mathcal{O}_{t_1}, \dots, \mathcal{O}_{t_s} \subset G$ les orbites adjointes de $t_1, \dots, t_s$. Soit $g \geq 2$. Soit Σ_0 une surface de Riemann orientée de genre g . Soit $x_1, \dots, x_s$ s points distincts de Σ_0 . On pose $\Sigma = \Sigma_0 \setminus \{x_1, \dots, x_s\}$. Soit $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$. Soit $M(G, t_1, \dots, t_s)$ l'espace des représentations de Γ à valeurs dans G , qui, évaluées sur un petit cercle c_i entourant t_i , prennent leurs valeurs dans l'orbite $\mathcal{O}_{t_i}$. Soit $S \subset T$ l'ensemble des $t \in T$ qui s'écrivent sous la forme $t = \sum_{\alpha \in R_+} t^\alpha h_\alpha$, de telle sorte que $\{h_\alpha \text{ tels que } t_\alpha \neq 0\}$ n'engendre pas t .

Définition 2.4 On dit que $t_1, \dots, t_s$ vérifient l'hypothèse (A) si pour tout $(w^1, \dots, w^s) \in W^s$, $\sum_{j=1}^s w^j t_j \notin S$.

Théorème 2.5 Si $(t_1, \dots, t_s)$ vérifient l'hypothèse (A), alors $M(G, t_1, \dots, t_s)$ est une variété sur laquelle G' agit localement librement.

On suppose que $(t_1, \dots, t_s)$ vérifient l'hypothèse (A). Alors par le Théorème 2.5, $M = M(G, t_1, \dots, t_s)$ est une variété C^∞ , et M/G' est un orbifold. Si $x \in M$, le stabilisateur $\text{St}(x) \subset G'$ est un groupe fini.

Proposition 2.6 L'ensemble des classes de conjugaison des $g' \in G'$ qui appartiennent à un stabilisateur $\text{St}(x)$ est en bijection avec $W \setminus C/\overline{R}^*$.

Soit $u \in C/\overline{R}^*$. Soit $M^u = \{x \in M; ux = x\}$. Si $t'_1, \dots, t'_s \in T$, on désigne par $M(Z(u), t'_1, \dots, t'_s)$ l'ensemble M relatif à $Z(u)$ et aux $Z(u)$ -orbites de $t'_1, \dots, t'_s$.

Proposition 2.7 Pour $u \in C/\overline{R}^*$, on a l'identité

$$(7) \quad M^u = \bigcup_{(w^1, \dots, w^s) \in (W(u) \setminus W)^s} M(Z(u), w^1 t_1, \dots, w^s t_s)$$

et les ensembles à droite de (9) sont non vides et disjoints.

Soit $\tilde{Z}(u)$ le revêtement universel de $Z(u)$. Soit CR_u l'ensemble des coracines de $\tilde{Z}(u)$. Rappelons que $\pi_1(Z(u)) = \overline{CR}/\overline{CR}_u$. Pour $u \in C/\overline{R}^*$, on a la décomposition naturelle

$$(8) \quad M^u = \bigcup_{\substack{(w^1, \dots, w^s) \in W(u) \setminus W^s \\ h \in \overline{CR}/\overline{CR}_u}} M(Z(u), w^1 t_1, \dots, w^s t_s, h),$$

Soit $x \in M$. Alors la représentation $x : \Gamma \rightarrow G$ définit un G fibré plat sur Σ . Si $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie de G , on pose $E = \Sigma \times_G \mathcal{G}$. Soit $\widehat{H}^1(\Sigma, E)$ l'image de la cohomologie relative dans la cohomologie absolue de Σ à coefficients dans E . Alors $\widehat{H}^1(\Sigma, E)$ est un fibré G' -équivariant sur M , qui définit le fibré tangent à l'orbifold M/G' . Si $\omega, \omega' \in \widehat{H}^1(\Sigma, E)$, on pose

$$(9) \quad \sigma(\omega, \omega') = \int_{\Sigma} - \langle \omega \wedge \omega' \rangle .$$

Alors σ est une 2 forme fermée G' invariante sur M qui descend en une 2-forme symplectique sur M/G' .

On suppose que $p \in \mathbf{Z}$, et que les orbites $\mathcal{O}(t_1), \dots, \mathcal{O}(t_s)$ sont d'ordre p , i.e. pour $1 \leq j \leq s, pt_j \in \overline{CR}$. Par une construction proche de [8], on peut construire sur M un G' -fibré en droites hermitien L_p , muni d'une connexion horizontale ∇^{L_p} telle que

$$(10) \quad c_1(L_p, \nabla^{L_p}) = p\sigma$$

Alors L_p descend en un orbifold-fibré en droites sur M/G' .

Proposition 2.8 *Si $u \in C/\overline{R}^*$, si $(w^1, \dots, w^s) \in W^s, h \in \frac{\overline{CR}}{\overline{CR}_u}$, alors l'action de u sur $L_p|_{M(Z(u), w^1 t_1, \dots, w^s t_s, h)}$ est donnée par multiplication par $e^{2i\pi p \langle \sum_1^s w^j t_j + h, u \rangle}$*

Soit $J^{TM/G'}$ une structure presque complexe G' invariante sur $\widehat{H}^1(\Sigma, E) \simeq TM/G'$ qui polarise la forme σ . Soit $D^{M/G'}$ l'opérateur de Dirac sur l'orbifold M/G' agissant sur les sections C^∞ de $\Lambda(T^{*(0,1)}M/G') \otimes L_p$ (où $T^{*(0,1)}M/G'$ est défini par $J^{TM/G'}$). L'indice $\text{Ind}(D_+^{M/G'})$ de la restriction $D_+^{M/G'}$ de $D^{M/G'}$ aux formes paires est donné par [7]. Soit $A(u, L_p)$ la classe caractéristique considéré comme ensemble de points fixes de u dans M/G' .

Théorème 2.9 *On a la formule*

$$(11) \quad \text{Ind}(D_+^{M/G'}) = \sum_{u \in C/\overline{R}^*} \frac{|W(u)|}{|W|} \frac{|Z(G)|}{|Z(Z(u))|} \int_{M^u/Z'(u)} A(u, L_p).$$

On pose $\Lambda_+ = \Lambda \cap K$. Pour $\lambda \in \Lambda_+$, soit χ_λ le caractère de la représentation de G de plus haut poids λ . Pour t régulier dans T , soit $V_G(t_1, \dots, t_s, t)$ le volume symplectique de la variété M/G' associée aux orbites de $t_1, \dots, t_s, t$. Rappelons le résultat fondamental de Witten [12]:

Théorème 2.10 *On a la formule*

$$(12) \quad V_G(t_1, \dots, t_s, t) = |Z(G)| \frac{\text{Vol}(G)^{(2g+s-1)}}{\text{Vol}(T)^{s+1}} \sum_{\lambda \in \Lambda_+} \frac{\prod_{j=1}^s |\sigma(t_j)| \chi_\lambda(t_j) |\sigma(t)| \chi_\lambda(t)}{[\chi_\lambda(1)]^{2g+s-1}}.$$

Soit $\Lambda_u = \overline{CR}_u^*$. Pour $t \in \mathfrak{t}$, on pose

$$(13) \quad \pi_u(t) = \prod_{\alpha \in R_{u+}} \langle 2i\pi\alpha, t \rangle.$$

Définition 2.11 *Pour $u \in C/\overline{R}^*$, $n \in \mathbf{N}$, $t \in \mathfrak{t}/\overline{CR}_u$, on pose*

$$(14) \quad \tilde{P}_{u,n}(t) = - \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_u \\ \pi_u * (\lambda) \neq 0}} \frac{\exp(2i\pi \langle \lambda, t \rangle)}{[\pi_u(\lambda)]^n}.$$

De même pour $u \in C/\overline{R}^$, $n \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, $t \in T = \mathfrak{t}/\overline{CR}$, on pose*

$$(15) \quad P_{u,n,q}(t) = \frac{1}{|\frac{\overline{CR}}{\overline{CR}_u}|} \sum_{h \in \frac{\overline{CR}}{\overline{CR}_u}} \exp(2i\pi \langle qu, h \rangle) \tilde{P}_{u,n}(t + h).$$

On vérifie très que $P_{u,n,q}(t)$ est un polynôme sur $T \setminus S$. Soit c le nombre dual de Coxeter de G . Si $\alpha_0 \in R_+$ est la racine dominante, alors $c = \langle \rho, h_{\alpha_0} \rangle + 1$. Soit $H_u(t)$ la fonction

$$(16) \quad H_u(t) = (-1)^{\ell(g-1)+1} \left[\frac{\prod_{\alpha \in R_{u,+}} \langle \alpha, t \rangle}{\prod_{\alpha \in R_+} 2 \sinh(\frac{1}{2} \langle \alpha, t + 2i\pi u \rangle)} \right]^{2g-2+s}$$

Théorème 2.12 *Pour $u \in C/\overline{R}^*$, on a*

$$(17) \quad \int_{M^u/Z'(u)} A(u, L_p) = \text{Vol}(T)^{2g-2} \frac{|Z(Z(u))|}{|W(u)|} (p+c)^{(g-1) \dim(z(u)) + (s/2) \dim(z(u)/\mathfrak{t})} \\ H_u\left(\frac{\partial/\partial t}{p+c}\right) \sum_{(w^1, \dots, w^1) \in W^s} \prod_{j=1}^s \varepsilon_{w^j} e^{\langle w^j(\rho - ct_j), \frac{\partial/\partial t}{p+c} \rangle + 2i\pi \langle w^j(\rho + pt_j), u \rangle} \\ P_{u, 2g-2+s, p+c}(t) \Big|_{t=\sum_1^s w^j t_j}.$$

Soit $e_1, \dots, e_r \subset R_+$ la base simple correspondante, soit $e^1, \dots, e^r$ la base duale. On numérote R_+ sous la forme $R_+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$, avec $\alpha_i = e_i$ pour $1 \leq i \leq r$. On dit que $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, \ell\}$ est générique si pour tout j , $1 \leq j \leq r$, $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_j}, e_{j+1}, \dots, e_r)$ est une base de t^* . On pose

$$(18) \quad \langle \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_r} \rangle = \langle \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_r}, e^1 \wedge \dots \wedge e^r \rangle.$$

Si I est générique, $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ est une base de t^* . Soit $\alpha^{i_1}, \dots, \alpha^{i_r}$ la base duale de t . Pour $x \in \mathbf{C}^\ell$, on pose

$$(19) \quad x^I = \sum_{j=1}^r x_{i_j} \alpha^{i_j}.$$

Pour $1 \leq j \leq r$, soit p_j^I le projecteur de t sur $\{e_{j+1}, \dots, e_r\}$ de noyau $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_j}\}$. On note $I_u = \{i \in \{1, \dots, \ell\}, \alpha_i \in R_{u,+}\}$.

Définition 2.13 On note $\mathcal{I}_u$ l'ensemble des $I = (i_1, \dots, i_r) \subset I_u$ tels que si $\sigma \in \mathcal{S}_r$ est défini sur $i_{\sigma^I(1)} < i_{\sigma^I(2)} < \dots < i_{\sigma^I(r)}$, si $j \in I_u \setminus I$, ou bien $j < \sigma^I(1)$, ou bien si p_j est défini par $i_{\sigma^I(1)} < \dots < i_{\sigma^I(p_j)} < j < i_{\sigma^I(p_j+1)}$, alors $\alpha_j \notin \{\alpha_{i_{\sigma^I(1)}}, \dots, \alpha_{i_{\sigma^I(p_j)}}\}$.

Soit S_1 l'analogue de S dans $t/\overline{R}$. Soit τ la projection $T = t/\overline{CR} \rightarrow t/\overline{R}$. Alors τ envoie S dans S_1 . On pose $\overline{S} = \tau^{-1}S_1$. Alors $S \subset \overline{S}$. Si G est simplement lacé, $S = \overline{S}$. On fait l'hypothèse (A') que pour tout $(w^1, \dots, w^s) \in W^s$, $\sum_1^s w^j t_j \in T \setminus \overline{S}$. Pour $I = (i_1, \dots, i_r)$, on pose

$$(20) \quad \text{Res}_{x=0}^I = \text{Res}_{x_{i_{\sigma^I(r)}}=0} \dots \text{Res}_{x_{i_{\sigma^I(1)}}=0}.$$

Soit $d \in \mathbf{N}$ un multiple des $|\langle \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r} \rangle|$. Pour $\mu \in \Lambda/\overline{R}^*$, soit $\lambda_\mu \in \Lambda$ un représentant de μ . On pose $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$. Soit $x \in \mathbf{R} \rightarrow [[x]]$ la fonction périodique de période 1 telle que $[[x]] = x$ pour $x \in [0, 1[$.

Théorème 2.14 *Pour $p \in \mathbf{N}$, et $(t_1, \dots, t_s)$ vérifiant (A'), alors*

$$\begin{aligned}
(21) \quad \text{Ind}(D_+^{M/G'}) &= \text{Vol}(T)^{2g-2} \frac{|Z(G)|}{|W|} (p+c)^{(g-1)\dim(T)} (-1)^{\ell(g-1)+r} \\
&\sum_{u \in C/\overline{R}^*} \sum_{\substack{I=(i_1, \dots, i_r) \in I_u \\ f \in \overline{R}/d\overline{R} \\ \mu \in \Lambda/\overline{R}^*}} \frac{1}{\langle \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r} \rangle} \text{Res}_{x=0}^I \left(\left[\prod_{\alpha \in R_+} \frac{1}{2 \sinh(\frac{1}{2} \langle \alpha, \frac{x^I}{p+c} + 2i\pi u \rangle)} \right]^{2g-2+s} \right. \\
&\quad \sum_{(w^1 \dots w^s) \in W^s} \varepsilon_{w^1} \dots \varepsilon_{w^s} \exp \left(\langle \sum_{j=1}^s w^j (p - ct_j), \frac{x^I}{p+c} \rangle \right. \\
&\quad \left. + 2i\pi \langle \sum_{j=1}^s w^j t_j, \lambda^\mu \rangle + 2i\pi \langle \sum_{j=1}^s w^j (\rho + pt_j) + (p+c)f, u \rangle \right) \\
&\quad \left\{ \exp \left(d \sum_{j=1}^r \frac{\langle p_{j-1}^I \alpha_{i_j}, x^I \rangle}{\langle p_{j-1}^I \alpha_{i_j}, e^j \rangle} \left[\frac{1}{d} \langle p_{j-1}^I (\sum_{j=1}^s w^j t_j + f), e_j \rangle \right] \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\prod_{j=1}^r \left(\exp \left(d \frac{\langle p_{j-1}^I \alpha_{i_j}, x^I \rangle}{\langle p_{j-1}^I \alpha_{i_j}, e^j \rangle} \right) - 1 \right)} \right\} (x - 2i\pi \tilde{\lambda}_\mu)
\end{aligned}$$

PREUVE : On utilise le Théorème 2.12 et le théorème des résidus.

Soient $\theta_1, \dots, \theta_s$ des éléments de $\Lambda_+ \cap \overline{R}$. On introduit maintenant l'expression donnée par Verlinde [11].

Définition 2.15 *Pour $g \in \mathbf{N}^*$, $q \in \mathbf{N}$, on pose*

$$(22) \quad V_{g,q}(\theta_1, \dots, \theta_s) = \text{Vol}(T)^{2g-2} q^{(g-1)\dim(T)} \frac{|Z(G)|}{|W|} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda/q\overline{R}^* \\ \sigma(\lambda/q) \neq 0}} \frac{1}{[i\sigma(\lambda/q)]^{2g-2}} \prod_{j=1}^s \chi_{\theta_j}(e^{\lambda/q}).$$

Définition 2.16 *On dit que $(\theta_1, \dots, \theta_s)$ vérifient (B_q) si pour tout $(w^1, \dots, w^s) \in W^s$, $\frac{1}{q} \sum_{j=1}^s w^j \theta_j$, considéré comme élément de $\mathfrak{t}/\overline{R}$, n'appartient pas à S_1 .*

Théorème 2.17 *Supposons que $t_1, \dots, t_s$ sont d'ordre $p_0 \in \mathbf{N}$, et vérifient (A'). Alors pour $p \in \mathbf{Z}$ multiple de p_0 de module assez grand*

$$(23) \quad \text{Ind}(D_+^{M/G'}) = V_{g,p+c}(pt_1, \dots, pt_s).$$

PREUVE : Par un théorème des résidus, on montre que $V_{g,p+c}(pt_1, \dots, pt_s)$ est donné par une formule essentiellement équivalente à la formule donnée au Théorème 2.14. On voit apparaître ainsi des contributions des pôles du dénominateur de la formule de Weyl. Sauf pour $SU(n)$ —pour lequel toutes les bases réelles de $\mathfrak{t} \simeq \mathfrak{t}^*$ incluses dans R engendrent $\overline{R}$ —apparaissent des pôles supplémentaires qu'on décrit à l'aide des $u \in C/\overline{R}^*$.

REMARQUE. Dans [3], on se débarrasse des hypothèses restrictives (A) ou (A'). Par une petite perturbation de $t_1, \dots, t_s$, dans le cas général, on obtient un opérateur de Dirac sur une variété orbifold tel que le Théorème soit encore vrai. Pour obtenir le Théorème pour tout p multiple de p_0 , on doit prendre une perturbation non triviale de cette variété. Avec $s=0$ ou 1, ces restrictions sont inutiles. Dans [3], on traite avec les mêmes techniques le cas où $g=0$ ou 1.

References

- [1] A.Beauville: Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula. In Proc. of the Hirzebruch conference in Alg.Geom.(Ramat Gan) 1993, p 75-96. Math. Conf. Proc. 9, Bar Ilan University, Ramat-Gan, Israel.
- [2] A. Beauville, Y. Laszlo: Conformal blocks and generalized theta functions. Comm. Math. Phys. 164 (1994), 385-419.
- [3] J.-M. Bismut, F. Labourie: A paraître.
- [4] G. Faltings: A proof of the Verlinde formula. J. Alg. Geom. 3 (1994) 347-374.
- [5] L. Jeffrey, F. Kirwan: Localization for non abelian group actions. Topology 34 (1995), 291-327.
- [6] L. Jeffrey, F. Kirwan: Intersection theory on moduli spaces of holomorphic bundles of arbitrary rank on a Riemann surface. Preprint alg-geom/9608029
- [7] T. Kawasaki: The Riemann-Roch theorem for complex V-manifolds. Osaka J. of Math. 16(1979),151-159.
- [8] T.R. Ramadas, I.M. Singer, J. Weistman: Some comments on Chern-Simons gauge theory. Comm. Math. Phys. 126(1989), 409-

- [9] C. Sorger: A paraître.
- [10] A. Tsuchiya, K. Ueno et Y. Yamada: Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries. In Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, p 459-566. Adv. Stud. Pure Math., 19, Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [11] E. Verlinde: Fusion rules and modular transformations in 2-dimensional conformal theory. Nuclear Phys. B 300 (1988),360-376.
- [12] E. Witten: On quantum gauge theories in two dimensions. Comm. Math.Phys. 141 (1991), 153-209.